II. kolo kategorie Z8

Z8–II–1

Pepík si do sešitu napsal následující úlohu:

$$M + A + M + R + A + D + M + A + T + E + M + A + T + I + K + U =$$

Poté nahrazoval písmena číslicemi od 1 do 9, a to tak, že různá písmena nahrazoval různými číslicemi a stejná stejnými.

Jaký největší součet mohl Pepík dostat? A mohl Pepík dostat součet 50?

Časem se Pepíkovi podařilo vytvořit součet 59. Která číslice mohla v takovém případě odpovídat písmenu T? Určete všechny možnosti. (*E. Novotná*)

Možné řešení. V Pepíkově výrazu je právě devět různých písmen, přičemž písmena M a A se opakují čtyřikrát a písmeno T dvakrát. Při libovolném nahrazení písmen číslicemi podle uvedených požadavků platí, že součet $M + A + R + D + T + E + I + K + U$ je roven součtu všech číslic od 1 do 9, což je 45. Pepíkův součet tedy můžeme vyjádřit jako

$$4M + 4A + R + D + 2T + E + I + K + U = 3M + 3A + T + 45.$$

Největší součet lze dostat tak, že nejčastěji se opakující písmena jsou nahrazena největšími možnými číslicemi. Stačí tedy písmena M a A nahradit číslicemi 9 a 8 (v libovolném pořadí) a písmeno T číslicí 7. Největší součet, který mohl Pepík dostat, je

$$3 \cdot 9 + 3 \cdot 8 + 7 + 45 = 103.$$

Součet 50 odpovídá takovému nahrazení písmen, že $3M + 3A + T + 45 = 50$, tedy $3M+3A+T = 5$. To však není možné, neboť při jakémkoli nahrazení je poslední zmiňovaný součet jistě větší než $3 + 3 + 1 = 7$. Součet 50 Pepík dostat nemohl.

Součet 59 odpovídá takovému nahrazení písmen, že $3M + 3A + T + 45 = 59$, tedy $3(M + A) + T = 14$. Přitom součet $M + A$ je nejméně 3 $(= 1 + 2)$ a nejvýše 4 (pokud $M + A > 4$, potom $3(M + A) + T > 14$):

- pokud $M + A = 1 + 2 = 3$, potom $T = 14 - 3 \cdot 3 = 5$,
- pokud $M + A = 1 + 3 = 4$, potom $T = 14 - 3 \cdot 4 = 2$.

V obou případech písmena M, A a T odpovídají navzájem různým číslicím. Při součtu 59 mohlo být písmeno T nahrazeno buď číslicí 5, nebo 2.

Hodnocení. Po 1 bodu za odpověď na každou z dílčích otázek; 3 body za úplnost a kvalitu komentáře.

Z8–II–2

Krychle o hraně 12 cm byla rozdělena na menší navzájem shodné krychličky tak, že součet všech jejich povrchů byl osmkrát větší než povrch původní krychle.

Určete, kolik bylo malých krychliček a jak dlouhé byly jejich hrany. (*M. Volfová*)

Možné řešení. Pokud jsou hrany krychliček n-krát menší než hrana původní krychle, potom tato krychle byla rozdělena na $n \cdot n \cdot n = n^3$ krychliček. Povrch krychle je $6 \cdot 12^2$ (cm^2). Součet povrchů všech krychliček je

$$n^3 \cdot 6 \cdot \left(\frac{12}{n}\right)^2 = n \cdot 6 \cdot 12^2\,(\mathrm{cm}^2).$$

Aby byl tento součet osmkrát větší než povrch původní krychle, musí být $n = 8$. Krychle byla rozdělena na $8^3 = 512$ krychliček a hrana každé z nich měřila $12 : 8 = 1{,}5$ (cm).

Hodnocení. 2 body za vztah mezi poměrem délek hran krychle a krychliček ($1 : n$) a počtem všech krychliček (n^3); 2 body za vyjádření a porovnání povrchů; 2 body za dořešení.

Poznámka. K témuž výsledku lze dojít také postupným zkoušením dělení krychle, které vede k výpočtům odpovídajícím dosazování $n = 2{,}3, \ldots$ do předchozích výrazů. V takovém případě přizpůsobte hodnocení s ohledem na kvalitu komentáře.

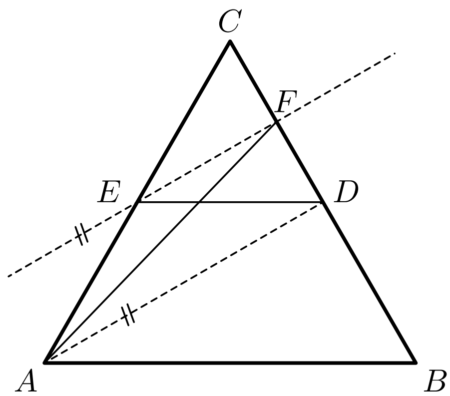
Z8–II–3

V rovnostranném trojúhelníku ABC se stranou délky 8 cm je bod D střed strany BC a bod E je střed strany AC. Bod F leží na úsečce BC tak, že obsah trojúhelníku ABF je stejný jako obsah čtyřúhelníku $ABDE$.

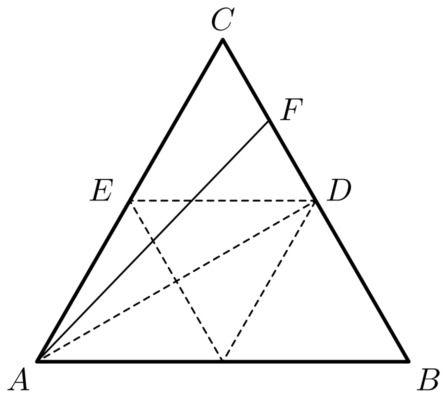
Vypočtěte délku úsečky BF. (*L. Růžičková*)

Možné řešení. Jak čtyřúhelník $ABDE$, tak trojúhelník ABF lze rozdělit na dva trojúhelníky, z nichž ABD je společný oběma. Zbývající části, tj. trojúhelníky ADE a ADF, proto musejí mít stejný obsah. Tyto dva trojúhelníky mají společnou stranu AD, proto musejí mít i stejnou výšku na tuto stranu. To znamená, že body E a F leží na rovnoběžce s přímkou AD.

Jelikož je bod E středem strany AC, je také bod F středem úsečky CD. Přitom bod D je středem úsečky BC, bod F je proto ve třech čtvrtinách úsečky BC. Hledaná délka úsečky BF je $4 + 2 = 6$ cm.



Jiné řešení. Rovnostranný trojúhelník ABC je svými středními příčkami rozdělen na čtyři shodné trojúhelníky, z nichž tři tvoří čtyřúhelník $ABDE$. Proto také obsah trojúhelníku ABF je roven třem čtvrtinám obsahu trojúhelníku ABC. Tyto dva trojúhelníky mají stejnou výšku ze společného vrcholu A, proto délka strany BF je rovna třem čtvrtinám délky strany BC. Hledaná délka úsečky BF je 6 cm.



Jiné řešení. Úsečka ED je střední příčkou trojúhelníku ABC, proto je rovnoběžná s AB a má délku $8 : 2 = 4\,(\mathrm{cm})$. Čtyřúhelník $ABDE$ je lichoběžníkem se základnami délek 8 cm a 4 cm a výškou, která je rovna polovině výšky trojúhelníku ABC.

Pokud velikost výšky trojúhelníku ABC označíme v, potom obsah lichoběžníku $ABDE$, resp. obsah trojúhelníku ABF je

$$\frac{(8+4)\cdot\frac{1}{2}v}{2} = 3v, \quad \text{resp.} \quad \frac{|BF|\cdot v}{2}.$$

Podle zadání jsou tyto obsahy stejné, proto $|BF| = 6\,\mathrm{cm}$.

Hodnocení. 2 body za jakýkoli poznatek vedoucí k jednoznačnému vymezení bodu F; 2 body za dořešení; 2 body podle kvality komentáře.