

Česko-polsko-slovenské střetnutí

IST Rakousko, 24. – 27. června 2018

(první soutěžní den – 25. června 2018)

1. Určete všechny funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takové, že pro všechna reálná čísla x, y platí

$$f(x^2 + xy) = f(x)f(y) + yf(x) + xf(x + y).$$

2. Je dán různostranný ostroúhlý trojúhelník ABC . Uvnitř stran AB a AC jsou postupně dány body D a E tak, že $|BD| = |CE|$. Označme O_1, O_2 postupně středy kružnic opsaných trojúhelníkům ABE, ACD . Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům ABC, ADE a AO_1O_2 mají společný bod různý od A .

3. Kolem kruhového stolu sedí 2018 hráčů. Na začátku hry rozdáme hráčům libovolně všechny karty z balíčku, který obsahuje K karet (někteří hráči nemusí dostat žádné karty). Následně v každém tahu zvolíme jednoho hráče, který si od každého ze svých dvou sousedů vezme jednu kartu. Je dovolené zvolit jen takového hráče, jehož oba sousedi mají nenulový počet karet. Hra skončí, když takový hráč neexistuje. Určete největší hodnotu K takovou, že bez ohledu na rozdání karet a následnou volbu hráčů hra vždy skončí po konečném počtu tahů.

Čas na vypracování: 4,5 hodiny.

Za každou úlohu je možné získat nejvýše 7 bodů.

Language: Czech

Česko-polsko-slovenské střetnutí

IST Rakousko, 24. – 27. června 2018

(druhý soutěžní den – 26. června 2018)

4. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC s obvodem $2s$ a tři navzájem disjunktní kruhy se středy v bodech A, B, C . Dokažte, že existuje kruh s poloměrem s , který obsahuje všechny tři dané kruhy.

5. V obdélníku o rozměrech 2×3 leží lomená čára s celkovou délkou 36, která může protínat sama sebe. Dokažte, že existuje přímka, která je rovnoběžná s dvěma stranami obdélníka, protíná zbylé dvě strany v jejich vnitřních bodech a protíná danou lomenou čáru v méně než 10 bodech.

6. Kladné celé číslo n nazveme *fantastické*, jestliže existují kladná racionální čísla a, b taková, že

$$n = a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b}.$$

- (a) Dokažte, že existuje nekonečně mnoho prvočísel p takových, že žádný násobek p není fantastický.
- (b) Dokažte, že existuje nekonečně mnoho prvočísel p takových, že aspoň jeden násobek p je fantastický.

Čas na vypracování: 4,5 hodiny.

Za každou úlohu je možné získat nejvýše 7 bodů.

Language: Czech