7th Czech–Polish–Slovak Junior Mathematical Competition

Individual contest

(Monday, 21 May 2018)

1. Jsou dána tři kladná reálná čísla x, y, z. Rozhodněte, zda vždy existuje taková čtveřice reálných čísel (a, b, c, d), že

$$ad + bc = x, \qquad ac + bd = y, \qquad ab + cd = z$$

a zároveň jedno z čísel a, b, c, d je součtem zbývajících tří.

2. Nechť $ABCDEF$ je konvexní šestiúhelník s rovnoběžnými stranami AB a DE. Každá z úhlopříček AD, BE a CF dělí tento šestiúhelník na dva čtyřúhelníky se stejným obvodem. Dokažte, že tyto tři úhlopříčky procházejí týmž bodem.

3. Paní učitelka dala každému ze 37 žáků 36 pastelek různých barev. Přitom každí dva žáci dostali právě jednu pastelku stejné barvy. Určete nejmenší počet barev, které mohou mít všechny rozdané pastelky.

4. Najděte nejmenší přirozené číslo A s lichým počtem číslic, které je dělitelné číslem 2 018 stejně jako číslo B, které dostaneme, když v A vyškrtneme prostřední číslici.

5. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC, pro který platí $|AB| < |AC|$. Na jeho straně AC leží bod E tak, že $|AB| = |AE|$. Nechť AD je průměrem kružnice opsané trojúhelníku ABC a S střed oblouku BDC této kružnice. Nechť je dále F bod souměrně sdružený s bodem D podle bodu S. Dokažte, že přímky FE a AC jsou kolmé.

Version: Czech
Time: 210 min

7th Czech–Polish–Slovak
Junior Mathematical Competition
Team contest
(Tuesday, 22 May 2018)

1. Pro přirozená čísla a, b, c platí

$$(a+b+c)^2 \mid ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+3abc.$$

Dokažte, že

$$(a+b+c) \mid (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2.$$

Uwaga. Rozwiązanie tego zadania powinno być napisane po słowacku lub po węgiersku.

2. Daný je pravouhlý trojuholník ABC s preponou AB. Nech K je ľubovoľný vnútorný bod trojuholníka ABC a body L, M sú obrazy bodu K v osových súmernostiach postupne podľa priamok BC, AC. Určte všetky možné hodnoty výrazu S_{ABLM}/S_{ABC}, pričom $S_{XY\ldots Z}$ označuje obsah mnohouholníka $XY\ldots Z$.

Uwaga. Rozwiązanie tego zadania powinno być napisane po czesku.

3. Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste r o następującej własności: Jeżeli liczby rzeczywiste a, b, c spełniają nierówność $|ax^2+bx+c| \le 1$ dla każdego $x \in \langle -1,1\rangle$, to spełniają również nierówność $|cx^2+bx+a| \le r$ dla każdego $x \in \langle -1,1\rangle$.

Poznámka. Riešenie tejto úlohy musí byť napísané v češtine.

4. Přímka procházející středem M rovnostranného trojúhelníku ABC protíná jeho strany BC a CA po řadě v bodech D a E. Kružnice opsané trojúhelníkům AEM a BDM se kromě bodu M dále protínají v bodě P. Dokažte, že střed kružnice opsané trojúhelníku DEP leží na ose úsečky AB.

Poznámka. Riešenie tejto úlohy musí byť napísané v poľštine.

5. Okolo okrúhleho stola sedí $2n$ ľudí ($n \ge 2$), pričom každý človek sa pozná s oboma svojimi susedmi a presne oproti nemu sedí človek, s ktorým sa nepozná. Dokážte, že ľudí možno presadiť tak, že každý sa bude poznať práve s jedným zo svojich dvoch susedov.

Poznámka. Řešení této úlohy odevzdejte v polském jazyce.

6. Dodatnie liczby rzeczywiste a, b są takie, że $a^3+b^3=2$. Wykaż, że zachodzi nierówność

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \ge 2(a^2-a+1)(b^2-b+1).$$

Poznámka. Řešení této úlohy odevzdejte ve slovenském nebo maďarském jazyce.

Time: 300 min