

## Dvě stříbra a dva bronzы z IMO 2018



Mezinárodní matematická olympiáda zavítala letos v červenci již pošesté ve své historii do Rumunska, kde se v roce 1959 konal i její první ročník. Soutěž hostilo studentské město Cluj-Napoca v srdci Transylvánie a zúčastnilo se jí 594 soutěžících ze 107 zemí. Naši studenti dovezli dvě stříbrné a dvě bronzové medaile.

Jako první na místo přijeli vedoucí národních delegací, jejichž hlavním úkolem bylo z 28 připravených návrhů rozdělených do čtyř kategorií (algebra, kombinatorika, geometrie a teorie čísel) vybrat šestici úloh pro ostrou soutěž a shodnout se na bodovacích schématech k jednotlivým úlohám. Zadání vybraných úloh naleznete na konci této zprávy. Zmíníme, že autorem druhé soutěžní úlohy je *Patrik Bak* ze Slovenska.

Soutěžící a pedagogičtí vedoucí přijeli do Rumunska o tři dny později. Ubytování byli po několika různých hotelích v centru města.

Soutěž proběhla 11. a 12. července ve sportovní hale. Soutěžící měli každý den 4,5 hodiny na řešení tří obtížných úloh a za každou z nich mohli získat až 7 bodů. Připomeňme, že zhruba polovina soutěžících si z olympiády dovezde medaili, přičemž počet udělených zlatých (G), stříbrných (S) a bronzových (B) medailí je v přibližném poměru 1 : 2 : 3. Na ně bylo letos nutné získat aspoň 16, 21, resp. 31 bodů (z 42 možných).

Českou republiku reprezentovali *Matěj Doležálek* z Gymnázia Dr. A. Hrdličky v Humpolci, *Pavel Hudec* z Gymnázia Jiřího Gutha-Jarkovského v Praze, *Lenka Kopfová* z Mendelova Gymnázia v Opavě, *Danil Koževnikov* z Gymnázia Jana Keplera v Praze, *Radek Olšák* z Mensa Gymnázia v Praze a *Martin Raška* z Wichterlova Gymnázia v Ostravě-Porubě. Vedoucím týmu byl *Josef Tkadlec* z IST Austria, pedagogickým vedoucím *Michal Rolínek*, Ph.D., z Institutu Maxe Plancka v Tübingenu.

Přehled výsledků našich soutěžících uvádíme v tabulce:

Umístění	Body za úlohu						Body	Cena
	1	2	3	4	5	6		
320.–337. Matěj Doležálek	7	4	0	0	2	0	13	HM
111.–121. Pavel Hudec	7	5	0	7	7	1	27	S
215.–227. Lenka Kopfová	7	3	0	7	1	1	19	B
87.–110. Danil Koževnikov	7	7	0	7	7	0	28	S
368.–390. Radek Olšák	1	0	0	7	1	1	10	HM
228.–251. Martin Raška	7	3	0	7	1	0	18	B
Celkem	36	22	0	35	19	3	115	

Tým, který se po 10 letech konečně neskládal ze samých chlapců, získal dvě stříbrné medaile (Danil a Pavel), dvě bronzové medaile (Lenka a Martin) a dvě čestná uznání (Matěj a Radek), která se udělují za úplně vyřešení alespoň jedné úlohy. V neoficiálním pořadí států dělila ČR 39.–40. místo s Argentinou. Tento jinak nadprůměrný výkon českého družstva zastínili historickými výkony naši sousedé: Slovinci poprvé po více než deseti letech získali tři stříbrné medaile a Poláci se poprvé od roku 1981 umístili v první desítce (devátí).

Umístění	Body za úlohu						Body	Cena
	1	2	3	4	5	6		
250.–272. Samuel Krajčí	7	2	0	7	1	0	17	B
193.–203. Lucia Krajčoviechová	7	2	0	7	5	0	21	B
61.–86. Martin Melicher	7	7	0	7	7	1	29	S
111.–121. Tomáš Sásik	7	7	0	7	6	0	27	S
215.–227. Michal Staník	2	3	0	7	7	0	19	B
111.–121. Ákos Záhorský	7	7	0	7	6	0	27	S
Celkem	37	28	0	42	32	1	140	

Co se týče ostatních států, na čele se umístila tradiční trojice USA, Rusko, Čína, následovaná netradičně Ukrajinou. V první desítce kromě výše zmíněného Polska najdeme již jen východoasijské státy. Kompletní výsledky jsou dostupné na

[https://www.imo-official.org/year\\_country\\_r.aspx?year=2018](https://www.imo-official.org/year_country_r.aspx?year=2018).

Přestože se českému týmu ve výsledku dařilo, několik žáků zůstalo za očekáváním. Oba maturanti měli zlaté ambice a medaile byly zcela jistě i v silách Radka a Matěje. V jejich případě lze doufat, že své zklamání přetaví ve zvýšené nasazení během následujícího školního roku, za něž pak mohou být odměněni na příští, jubilejní 60. mezinárodní matematické olympiádě, která proběhne v městě Bath ve Velké Británii.

Celkové pořadí států naleznete v následující tabulce:

	G	S	B	body		G	S	B	body
USA	5	1	0	212	Španělsko	0	0	2	74
Rusko	5	1	0	201	Norsko	0	0	2	73
ČLR	4	2	0	199	Rakousko	0	0	3	72
Ukrajina	4	2	0	186	Dánsko	0	0	3	71
Thajsko	3	3	0	183	Finsko	0	0	2	70
Tchaj-wan	3	1	2	179	Saudská Arábie	0	1	1	69
Jižní Korea	3	3	0	177	Sýrie	0	0	2	69
Singapur	2	3	1	175	JAR	0	0	1	66
<i>Polsko</i>	1	5	0	174	Kostarika	0	0	2	65
Indonésie	1	5	0	171	Turkmenistán	0	0	1	65
Austrálie	2	3	1	169	Makao	0	0	1	61
Velká Británie	1	4	0	161	Kolumbie	0	0	1	59
Japonsko	1	3	2	158	Island	0	0	1	56
Srbsko	2	2	2	158	Švýcarsko	0	0	1	52
Maďarsko	0	4	2	157	Ázerbájdžán	0	0	0	50
Kanada	0	5	1	156	Tunisko	0	0	0	49
Itálie	0	4	2	154	Ekvádor	0	0	0	48
Kazachstán	0	4	2	151	Srí Lanka	0	0	1	47
Írán	1	3	1	150	Maroko	0	0	0	46
Vietnam	1	2	3	148	Portoriko	0	0	1	46
Bulharsko	1	3	1	146	Kypr	0	0	1	45
Chorvatsko	0	4	1	145	Irsko	0	0	1	43
<i>Slovensko</i>	0	3	3	140	Kyrgyzstán	0	0	0	41
Švédsko	1	2	2	138	Lotyšsko	0	0	0	40
Turecko	1	1	4	138	Albánie	0	0	0	37
Izrael	0	2	4	136	Pákistán	0	0	0	35
Gruzie	0	1	5	133	Bolívie	0	0	0	33
Brazílie	1	0	4	132	Makedonie	0	0	0	27
Indie	0	3	2	132	Nigérie	0	0	0	26
Mongolsko	0	1	5	132	Trinidad a Tobago	0	0	0	26
Německo	1	2	1	131	Myanmar	0	0	0	23
Arménie	0	2	4	130	Kosovo	0	0	0	21
Francie	1	1	4	129	Panama	0	0	0	21
Rumunsko	1	1	2	129	Uzbekistán	0	0	0	21
Peru	0	2	3	125	Černá Hora	0	0	0	20
Mexiko	0	1	4	123	Salvádor	0	0	0	20
Nizozemsko	0	1	4	123	Chile	0	0	0	19
Filipíny	1	1	2	121	Alžírsko	0	0	0	18
Argentina	0	1	4	115	Lucembursko	0	0	0	14
<i>Česká republika</i>	0	2	2	115	Ghana	0	0	0	13
Bangladéš	1	0	3	114	Botswana	0	0	0	12
Slovensko	0	1	1	104	Paraguay	0	0	0	12
Bosna a Hercegovina	0	0	4	103	Kambodža	0	0	0	11
Tádžikistán	0	0	5	103	Guatemala	0	0	0	11
Bělorusko	0	0	4	102	Egypt	0	0	0	10
Nový Zéland	0	1	2	102	Irák	0	0	0	9
Belgie	0	0	4	92	Uganda	0	0	0	9
Malajsie	0	0	2	90	Pobřeží slonoviny	0	0	0	8
Hongkong	0	0	2	89	Uruguay	0	0	0	7
Moldavsko	0	0	3	86	Honduras	0	0	0	6
Estonsko	0	1	0	80	Nepál	0	0	0	5
Litva	0	0	2	77	Venezuela	0	0	0	2
Portugalsko	0	0	2	77	Tanzánie	0	0	0	1
Řecko	0	0	2	74					

## Texty soutěžních úloh

(v závorce je uvedena země, která úlohu navrhla)

1. Je dán ostroúhlý trojúhelník  $ABC$  s opsanou kružnicí  $\Gamma$ . Body  $D$ ,  $E$  leží postupně uvnitř stran  $AB$ ,  $AC$  tak, že  $|AD| = |AE|$ . Osy úseček  $BD$ ,  $CE$  protínají kratší oblouky  $AB$ ,  $AC$  kružnice  $\Gamma$  postupně v bodech  $F$ ,  $G$ . Dokažte, že přímký  $DE$  a  $FG$  jsou rovnoběžné (nebo totožné).

(Řecko)

2. Najděte všechna celá čísla  $n \geq 3$ , pro která existují reálná čísla  $a_1, a_2, \dots, a_{n+2}$  taková, že  $a_{n+1} = a_1$ ,  $a_{n+2} = a_2$  a

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

pro  $i = 1, 2, \dots, n$ .

(Slovensko)

3. *Packalův trojúhelník* je tabulka čísel ve tvaru rovnostranného trojúhelníku taková, že kromě čísel ve spodním řádku je každé číslo rovno absolutní hodnotě rozdílu dvou čísel bezprostředně pod ním. Následující tabulka je příkladem Packalova trojúhelníku o čtyřech řádcích, který obsahuje všechna celá čísla od 1 po 10:

$$\begin{array}{cccc} & & & 4 \\ & & 2 & 6 \\ & 5 & 7 & 1 \\ 8 & 3 & 10 & 9 \end{array}$$

Rozhodněte, zda existuje Packalův trojúhelník o 2018 řádcích, který obsahuje všechna celá čísla od 1 po  $1 + 2 + \dots + 2018$ .

(Írán)

4. *Značka* je bod  $(x, y)$  v rovině takový, že  $x$  a  $y$  jsou kladná celá čísla nepřevyšující 20.

Na začátku je všech 400 značek prázdných. Amálka a Budulínek na ně střídavě pokládají kamínky, přičemž Amálka začíná. Amálka ve svém tahu položí nový červený kamínek na prázdnou značku tak, aby vzdálenost každých dvou značek s červenými kamínky byla různá od  $\sqrt{5}$ . Budulínek ve svém tahu položí nový modrý kamínek na jakoukoli prázdnou značku. (Značka s modrým kamínkem může mít jakékoli vzdálenosti od ostatních značek.) Hra skončí, jakmile jeden z hráčů nemůže táhnout.

Najděte největší  $K$  takové, že Amálka může vždy položit alespoň  $K$  červených kamínků, ať už hraje Budulínek jakkoli.

(Arménie)

**5.** Necht  $a_1, a_2, \dots$  je nekonečná posloupnost kladných celých čísel. Předpokládejme, že existuje celé číslo  $N > 1$  takové, že pro všechna  $n \geq N$  je číslo

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

celé. Dokažte, že existuje celé číslo  $M$  takové, že  $a_m = a_{m+1}$  pro všechna  $m \geq M$ . (Mongolsko)

**6.** Konvexní čtyřúhelník  $ABCD$  splňuje  $|AB| \cdot |CD| = |BC| \cdot |DA|$ . Uvnitř něj leží bod  $X$  takový, že

$$|\sphericalangle XAB| = |\sphericalangle XCD| \quad \text{a} \quad |\sphericalangle XBC| = |\sphericalangle XDA|.$$

Dokažte, že  $|\sphericalangle BXA| + |\sphericalangle DXC| = 180^\circ$ . (Polsko)