

# 68. ročník matematické olympiády

## III. kolo kategorie A

Benešov, 25. března 2019



1. V oboru reálných čísel řešte soustavu

$$\begin{aligned}x^2 - yz &= |y - z| + 1, \\y^2 - zx &= |z - x| + 1, \\z^2 - xy &= |x - y| + 1.\end{aligned}$$

2. Je dán pravoúhelník  $ABCD$ , kde  $|AB| = a \geq b = |BC|$ . Na přímce  $BD$  sestrojte body  $P$  a  $Q$  tak, aby platilo  $|AP| = |PQ| = |QC|$ . Proveďte diskusi o počtu řešení vzhledem k délkám  $a, b$ .
3. Nechť  $a, b, c, n$  jsou kladná celá čísla taková, že jsou splněny následující podmínky:
- (i) čísla  $a, b, c, a + b + c$  jsou po dvou nesoudělná;
  - (ii) číslo  $(a + b + c)(a + b)(b + c)(c + a)(ab + bc + ca)$  je  $n$ -tou mocninou celého čísla.
- Dokažte, že součin  $abc$  lze zapsat jako rozdíl dvou  $n$ -tých mocnin celých čísel.

# 68. ročník matematické olympiády

## III. kolo kategorie A

Benešov, 26. března 2019



4. Je dán ostroúhlý trojúhelník  $ABC$ . Na polopřímce opačné k polopřímce  $BC$  leží bod  $P$  takový, že  $|AB| = |BP|$ . Analogicky na polopřímce opačné k polopřímce  $CB$  leží bod  $Q$  takový, že  $|AC| = |CQ|$ . Označme  $J$  střed kružnice připsané straně  $BC$  daného trojúhelníku a  $D, E$  po řadě její body dotyku s přímkami  $AB$  a  $AC$ . Předpokládejme, že polopřímky opačné k polopřímkám  $DP$  a  $EQ$  se protínají v bodě  $F$  různém od  $J$ . Dokažte, že  $AF \perp FJ$ .

5. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho celých čísel, která nelze vyjádřit ve tvaru

$$2^a + 3^b - 5^c,$$

kde  $a, b, c$  jsou nezáporná celá čísla.

6. Pro která přirozená čísla  $n$  lze do tabulky  $n \times n$  vepsat všechna celá čísla od 1 do  $n^2$  tak, aby aritmetický průměr čísel v každém řádku i sloupci tabulky byl celým číslem?

---

1. V oboru reálných čísel řešte soustavu

$$\begin{aligned}x^2 - yz &= |y - z| + 1, \\y^2 - zx &= |z - x| + 1, \\z^2 - xy &= |x - y| + 1.\end{aligned}$$

(Tomáš Jurík)

**Řešení.** Daná soustava rovnic je symetrická, takže stačí hledat jen ta řešení, jež splňují nerovnosti  $x \geq y \geq z$ . Za tohoto předpokladu můžeme odstranit absolutní hodnoty, a tak dostaneme

$$x^2 - yz = y - z + 1, \quad (1)$$

$$y^2 - zx = x - z + 1, \quad (2)$$

$$z^2 - xy = x - y + 1. \quad (3)$$

Postupným odečtením rovnic (1) a (2), resp. (2) a (3) dostáváme po snadných úpravách rovnice

$$(x - y)(x + y + z + 1) = 0,$$

$$(y - z)(x + y + z - 1) = 0.$$

Odtud plyne, že všechna tři čísla  $x$ ,  $y$ ,  $z$  nemohou být navzájem různá, nemohou však být ani všechna stejná, protože to bychom v původních rovnicích dostali  $0 = 1$ . Právě dvě z nich jsou tedy různá, takže platí buď  $x = y > z$  a  $x + y + z = 1$ , nebo  $x > y = z$  a  $x + y + z = -1$ .

Všimněme si, že trojice  $(x, y, z)$  vyhovuje původní soustavě, právě když jí vyhovuje „opačná“ trojice  $(-z, -y, -x)$ . Přejít k opačné trojici nemění zavedené uspořádání čísel v trojici a převádí druhý případ z předchozího odstavce na první z nich.

Stačí proto vyřešit první případ, kdy  $x = y > z$  a  $x + y + z = 1$ . To nám dává  $z = 1 - 2x$ . Dosazením například do rovnice (1) dostaneme po úpravě  $x(3x - 4) = 0$ , takže  $x = 0$  nebo  $x = \frac{4}{3}$ . Tomu odpovídají trojice  $(x, y, z)$  rovné  $(0, 0, 1)$  a  $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{5}{3})$ . První trojice zřejmě nesplňuje předpoklad  $x \geq y \geq z$ , a tak původní soustavě vyhovuje jen druhá trojice (zkouška při uvedeném postupu není nutná).

S přihlédnutím ke změnám pořadí neznámých a přechodům k opačným trojicím má soustava 6 řešení:

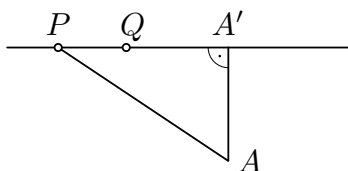
$$\begin{aligned}\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{5}{3}\right), \quad \left(-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right), \quad \left(\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right), \\ \left(\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right), \quad \left(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right), \quad \left(-\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{4}{3}\right).\end{aligned}$$

2. Je dán pravoúhelník  $ABCD$ , kde  $|AB| = a \geq b = |BC|$ . Na přímce  $BD$  sestrojte body  $P$  a  $Q$  tak, aby platilo  $|AP| = |PQ| = |QC|$ . Proveďte diskusi o počtu řešení vzhledem k délkám  $a, b$ .  
(Jaroslav Švrček)

**Řešení.** Všimněme si nejdříve, že se ani zadání úlohy bez podmínky  $a \geq b$ , ani množina dvojic bodů  $(P, Q)$ , které jsou jejími řešeními, nezmění, pokud navzájem vyměníme označení vrcholů  $B$  a  $D$ . Podmínku  $a \geq b$  proto uplatníme až k jednoduššímu zápisu závěrečné diskuse o počtu řešení.

Označme  $A'$  a  $C'$  kolmé průměty bodů  $A$  a  $C$  na přímku  $BD$ . Zřejmě oba průměty padnou dovnitř úsečky  $BD$  a platí  $|AA'| = |CC'|$ . Předpokládejme, že body  $P$  a  $Q$  mají požadované vlastnosti. Jelikož  $|AP| = |CQ|$ , je  $P = A'$ , právě když  $Q = C'$ . Nastane-li tato situace, budou body  $P, Q$  (coby body  $A', C'$ ) souměrně sdružené podle středu  $S$  úsečky  $BD$ . Totéž bude o bodech  $P, Q$  platit i v případě, kdy  $A' = C'$  ( $= S$ ) — tehdy jsou pravoúhlé trojúhelníky  $APS, CQS$  shodné podle věty  $Ssu$ , takže  $|PS| = |QS|$ , přičemž nemůže být  $P = Q$ .

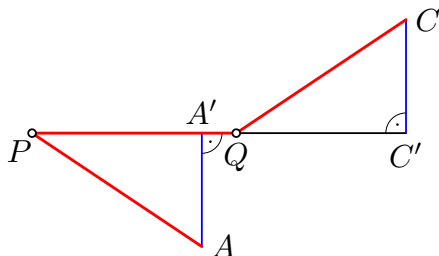
Tyto „symetrické“ případy  $P = A', Q = C', A' = C'$  tedy z dalšího rozboru vyloučíme. Právě tak vyloučíme i možnost, že by bod  $Q$  ležel na úsečce  $A'P$ , protože by pak podle obr. 1 platilo  $|AP| > |A'P| \geq |PQ|$ , což odporuje požadavkům úlohy. A symetricky ani bod  $P$  nemůže ležet na úsečce  $QC'$ . V rozboru opakovaně využijeme rovnost  $|A'P| = |C'Q|$ , která plyne z trojúhelníků  $A'PA$  a  $C'QC$ , jež se shodují podle věty  $Ssu$ .



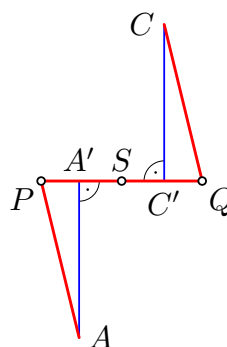
Obr. 1

Za předpokladů  $P \neq A', Q \neq C', A' \neq C', Q \notin A'P$  a  $P \notin C'Q$  rozlišíme možné polohy bodů  $P, Q$  na přímce  $A'C'$  následovně:

1.  $P$  leží na polopřímce opačné k polopřímce  $A'C'$ :
  - a)  $Q$  leží na úsečce  $A'C'$  (obr. 2). Potom z  $|A'P| = |C'Q|$  máme  $|PQ| = |A'C'|$ , takže  $|AP| = |A'C'|$ .
  - b)  $Q$  leží na polopřímce opačné k polopřímce  $C'P$  (obr. 3). Tehdy z  $|A'P| = |C'Q|$  máme, že body  $P, Q$  jsou souměrně sdružené podle středu  $S$  úsečky  $A'C'$  neboli středu úhlopříčky  $BD$ .

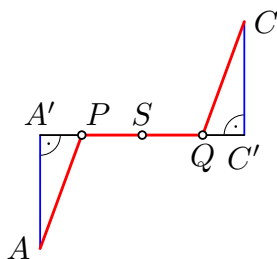


Obr. 2

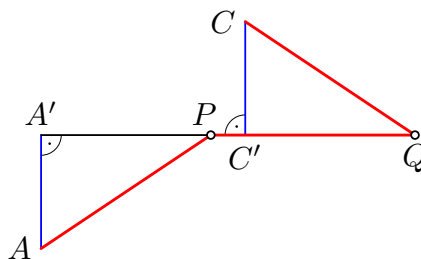


Obr. 3

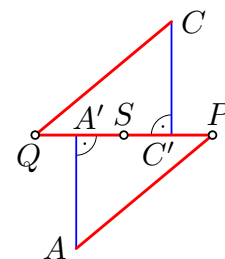
2.  $P$  leží na úsečce  $A'C'$ :
  - a)  $Q$  leží na úsečce  $C'P$  (obr. 4). Tehdy podobně jako v případě 1b máme, že body  $P, Q$  jsou souměrně sdružené podle středu  $S$  úhlopříčky  $BD$ .
  - b)  $Q$  leží na polopřímce opačné k polopřímce  $C'P$  (obr. 5). Tehdy podobně jako v případě 1a máme  $|AP| = |A'C'|$ .



Obr. 4



Obr. 5



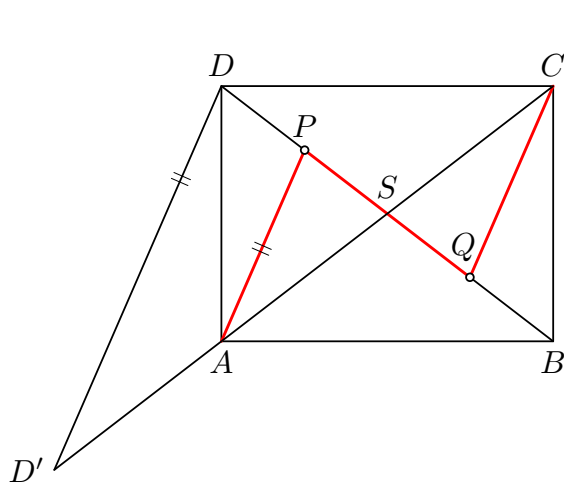
Obr. 6

3.  $P$  leží na polopřímce opačné k polopřímce  $C'A'$ :

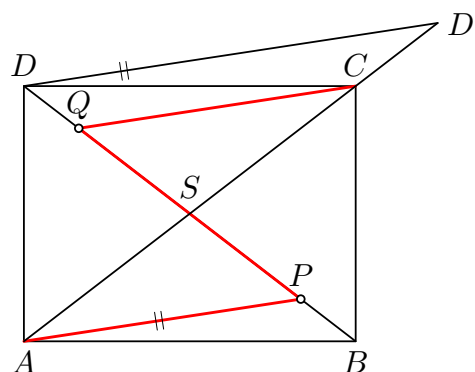
Bod  $Q$  pak musí ležet na polopřímce opačné k polopřímce  $A'C'$  (obr. 6). Podobně jako v případě 1b tak máme, že body  $P, Q$  jsou souměrně sdružené podle středu  $S$  úhlopříčky  $BD$ .

Dokázali jsme, že buď jsou body  $P, Q$  souměrně sdružené podle středu  $S$ , nebo platí  $|AP| = |A'C'|$ . Popíšeme nejprve *konstrukci* v prvním případě, který zahrnuje i situace, kdy  $P = A', Q = C'$  nebo  $A' = C'$ , jež jsme úvodem z našeho rozboru vyloučili. Tehdy platí  $|AP| = |PQ| = 2|PS|$ . Naopak, pokud některý bod  $P$  přímky  $BD$  bude splňovat rovnost  $|AP| = 2|PS|$ , tak k němu jednoznačně sestrojíme bod  $Q$  souměrně sdružený podle středu  $S$ , přičemž bude platit  $|AP| = |PQ| = |QC|$ . Zaměříme se tedy na konstrukci bodu  $P$ .

Označme  $D'$  průsečík přímky  $AC$  a rovnoběžky s  $AP$  bodem  $D$ . Trojúhelníky  $SPA$  a  $SDD'$  jsou stejnohlé se středem  $S$ . Jelikož  $|AP| = 2|PS|$ , je  $|DD'| = 2|DS|$ . Odtud již plyne konstrukce, v níž nejprve sestrojíme bod  $D'$ . Takové body jsou vždy dva, přičemž jeden leží na polopřímce  $SA$  (obr. 7) a druhý na polopřímce  $SC$  (obr. 8). Následně sestrojíme bod  $P$  jako průsečík rovnoběžky bodem  $A$  s přímkou  $DD'$ . Jelikož máme dvě možné polohy bodu  $D'$ , budeme mít dvě možné polohy bodu  $P$ , a tak v tomto případě budou existovat vždy právě dvě řešení.



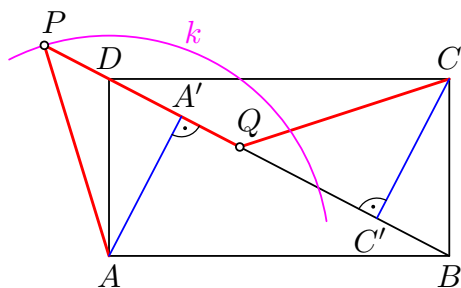
Obr. 7



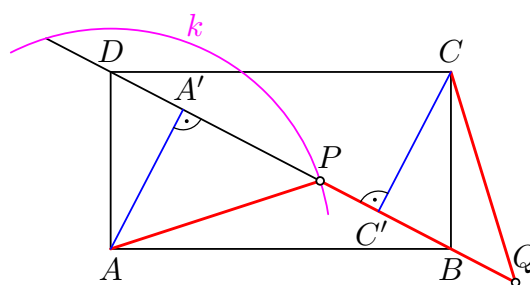
Obr. 8

V druhém případě  $|AP| = |A'C'|$  můžeme již předpokládat, že  $A' \neq C'$ . Podle rovnosti  $|AP| = |A'C'|$  snadno najdeme bod  $P$  jako průsečík přímky  $BD$  s kružnicí  $k(A, |A'C'|)$ . V případě  $|A'C'| > |AA'|$  dostaneme dva průsečíky neboli dvě řešení, v případě  $|A'C'| = |AA'|$  jedno řešení a konečně žádné řešení v případě  $|A'C'| < |AA'|$ . Možná řešení odpovídají případu 1a (obr. 9), resp. 2b (obr. 10). V obou z nich je poloha bodu  $Q$  určena jednoznačně a snadno zpětně ukážeme, že platí  $|AP| = |PQ| = |QC|$ .

Posoudíme nyní, kdy některá řešení z prvního a druhého případu splývají. Mají-li body  $P, Q$  souměrně sdružené podle středu  $S$  navíc splňovat i podmínku  $|PQ| = |AP| = |A'C'|$ , stane se tak jedině v situaci, kdy  $\{P, Q\} = \{A', C'\}$ . Ta je zřejmě možná, pouze když  $P = A'$  a  $Q = C'$ , což vede k rovnosti  $|A'C'| = |AA'|$ . Ta však znamená právě

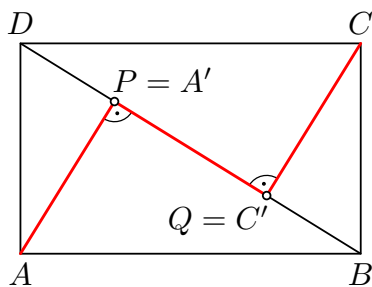


Obr. 9

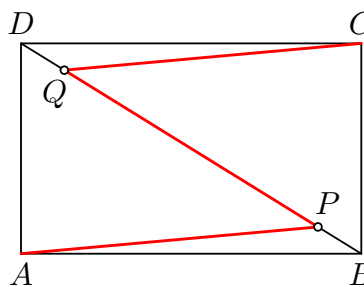


Obr. 10

to, že kružnice  $k$  se dotýká přímky  $BD$  v bodě  $A'$ , a proto (jediné) řešení z druhého případu splývá s tím ze dvou řešení prvního případu, při kterém  $P = A'$ . Úloha pak má celkem dvě řešení (obr. 11 a 12).



Obr. 11



Obr. 12

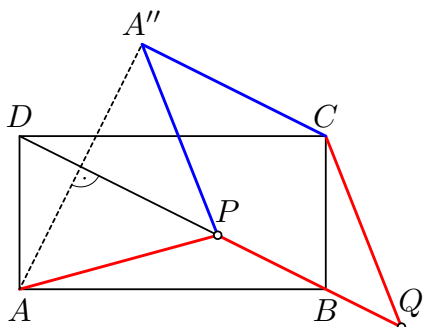
Zjistili jsme, že počet řešení z druhého případu, stejně jako splynutí jediného jeho řešení s jedním řešením prvního případu, závisí na poměru  $|A'C'| : |AA'|$ , který stačí vyjádřit pomocí poměru  $p = a : b$  pouze v případě, kdy  $a \geq b$  neboli  $p \geq 1$ . Podle Eukleidovy věty o odvěsně platí  $|DA'| = b^2/|BD| \leq a^2/|BD| = |DC'|$ , odkud  $|A'C'| = (a^2 - b^2)/|BD|$ . Dále  $|AA'| = 2S_{ABD}/|BD| = ab/|BD|$ , takže

$$|A'C'| : |AA'| = \frac{a^2 - b^2}{ab} = p - \frac{1}{p}.$$

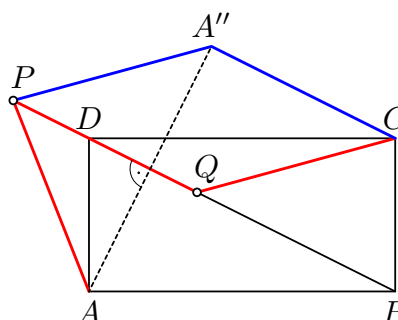
Přitom  $p - 1/p \geq 1$ , právě když  $p \geq \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ , což je hodnota takzvaného *zlatého řezu* označovaného  $\varphi$ . Výsledky lze shrnout takto:

$$\frac{a}{b} > \varphi: 4 \text{ řešení}, \quad 1 \leq \frac{a}{b} \leq \varphi: 2 \text{ řešení}.$$

*Poznámka 1.* Namísto zkoumání délek na přímce  $A'C'$  jsme mohli zkoumat úhly. Díky shodnosti trojúhelníků  $APA'$ ,  $CQC'$  totiž platí  $|\sphericalangle APQ| = |\sphericalangle CQP|$  nebo  $|\sphericalangle APQ| + |\sphericalangle CQP| = 180^\circ$ . Pomocí toho se dá vyšetřit, že v případech 1b, 2a, 3 tvoří body  $A, C, P, Q$  rovnoběžník s úhlopříčkami  $AC, PQ$ , takže  $P, Q$  jsou souměrně sdržené podle středu  $S$ . Dále v případech 1a (obr. 13) a 2b (obr. 14) můžeme definovat  $A''$  jako obraz bodu  $A$  v osové souměrnosti podle přímky  $BD$  a dokázat, že body  $A'', P, Q, C$  tvoří kosočtverec, v němž  $|A''P| = |A''C|$ , což už dává návod, jak sestrojít bod  $P$ .

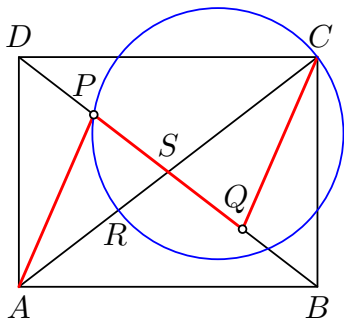


Obr. 13

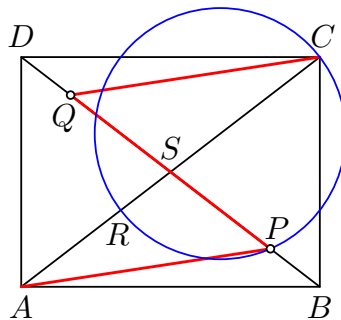


Obr. 14

*Poznámka 2.* Konstrukci v symetrickém případě jsme mohli provést i pomocí *Apolloniovy kružnice*. Hledáme množinu bodů  $P$  takových, že  $|AP| = 2|PS|$ . Sestrojíme tedy bod  $R$  na úsečce  $AS$  takový, že  $|AR| = 2|RS|$ . Dále platí  $|AC| = 2|SC|$ . Je známo, že hledaná množina bodů je kružnice nad průměrem  $RC$ . Tato kružnice protíná polopřímku  $SD$  v jednom bodě (obr. 15) a polopřímku  $SB$  v druhém bodě (obr. 16).



Obr. 15



Obr. 16

---

**3.** Necht  $a, b, c, n$  jsou kladná celá čísla taková, že jsou splněny následující podmínky:

- (i) čísla  $a, b, c, a + b + c$  jsou po dvou nesoudělná;
- (ii) číslo  $(a + b + c)(a + b)(b + c)(c + a)(ab + bc + ca)$  je  $n$ -tou mocninou celého čísla.

Dokažte, že součin  $abc$  lze zapsat jako rozdíl dvou  $n$ -tých mocnin celých čísel.

(Patrik Bak)

**Řešení.** Dokážeme, že čísla  $A = (a + b + c)(ab + bc + ca)$  a  $B = (a + b)(b + c)(c + a)$  jsou nesoudělná. Předpokládejme, že tomu tak není. Pak existuje prvočíslo  $p$ , jež dělí obě čísla  $A, B$ . Jelikož  $p \mid B$ , tak  $p$  dělí alespoň jedno z čísel  $a + b, b + c, c + a$ . Bez újmy na obecnosti necht' je to  $a + b$ . Pak ale nemůže platit  $p \mid a + b + c$ , neboť by bylo  $p \mid c$ , což je ve sporu s předpokladem (i). Nutně tedy  $p \mid ab + bc + ca = ab + c(a + b)$ , z čehož plyne  $p \mid ab$ , takže  $p$  dělí alespoň jedno z čísel  $a, b$ , což spolu s relací  $p \mid a + b$  znamená, že dělí obě čísla  $a, b$ , což je opět ve sporu s (i).

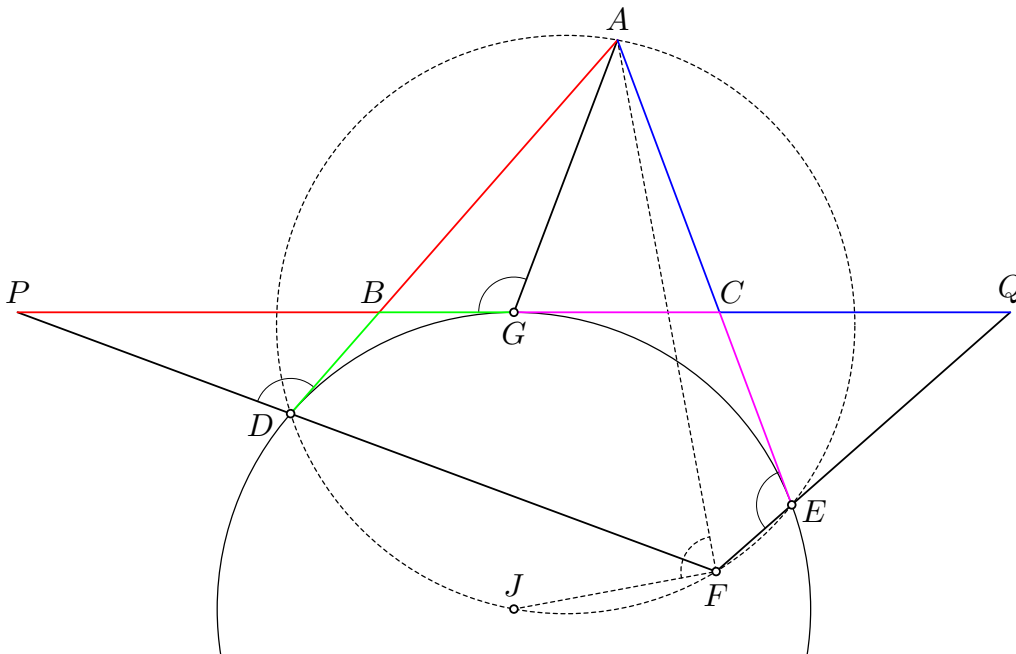
Čísla  $A, B$  jsou tedy opravdu nesoudělná a navíc jejich součin  $AB$  je podle předpokladu (ii)  $n$ -tá mocnina celého čísla. Proto musí i každé z čísel  $A, B$  být  $n$ -tou mocninou celého čísla. Jenže  $abc = A - B$ , takže je to opravdu rozdíl dvou  $n$ -tých mocnin celých čísel. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

*Poznámka.* Trojice  $(a, b, c) = (341, 447, 1235)$  vyhovuje zadání pro  $n = 2$ .



4. Je dán ostroúhlý trojúhelník  $ABC$ . Na polopřímce opačné k polopřímce  $BC$  leží bod  $P$  takový, že  $|AB| = |BP|$ . Analogicky na polopřímce opačné k polopřímce  $CB$  leží bod  $Q$  takový, že  $|AC| = |CQ|$ . Označme  $J$  střed kružnice připsané straně  $BC$  daného trojúhelníku a  $D, E$  po řadě její body dotyku s přímkami  $AB$  a  $AC$ . Předpokládejme, že polopřímky opačné k polopřímkám  $DP$  a  $EQ$  se protínají v bodě  $F$  různém od  $J$ . Dokažte, že  $AF \perp FJ$ . (Patrik Bak)

**Řešení.** Jelikož body  $A, D, E, J$  leží na kružnici s průměrem  $AJ$ , stačí k důkazu kolmosti  $AF \perp FJ$  ověřit, že na téže kružnici leží i bod  $F$  (obr. 17). Nechť  $G$  je dotykový bod uvažované připsané kružnice se stranou  $BC$ . Potom z rovností  $|AB| = |BP|$  a  $|BD| = |BG|$  plyne shodnost trojúhelníků  $ABG \cong PBD$  (*sus*) a podobně z rovností  $|AC| = |CQ|$  a  $|CE| = |CG|$  shodnost  $ACG \cong QCE$ . Postupně tak dostáváme  $|\sphericalangle AEF| = 180^\circ - |\sphericalangle CEQ| = 180^\circ - |\sphericalangle CGA| = |\sphericalangle BGA| = |\sphericalangle BDP| = |\sphericalangle ADP|$ . Odtud  $|\sphericalangle AEF| + |\sphericalangle ADF| = 180^\circ$ , což už znamená, že bod  $F$  leží s body  $A, E, D$  na téže kružnici, jak jsme potřebovali dokázat.



Obr. 17

*Poznámka.* Potřebný závěr, že čtyřúhelník  $ADFE$  je tětiový, lze odvodit, jak nyní ukážeme, i pomocí druhé dvojice jeho protějších vnitřních úhlů při vrcholech  $A$  a  $F$ . Ze shodnosti trojúhelníků  $ABG \cong PBD$  a  $ACG \cong QCE$  plyne, že  $|\sphericalangle DAE| = |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BAG| + |\sphericalangle GAC| = |\sphericalangle BPD| + |\sphericalangle CQE| = |\sphericalangle QPF| + |\sphericalangle PPF| = 180^\circ - |\sphericalangle PFQ| = 180^\circ - |\sphericalangle DFE|$  neboli  $|\sphericalangle DAE| + |\sphericalangle DFE| = 180^\circ$ .

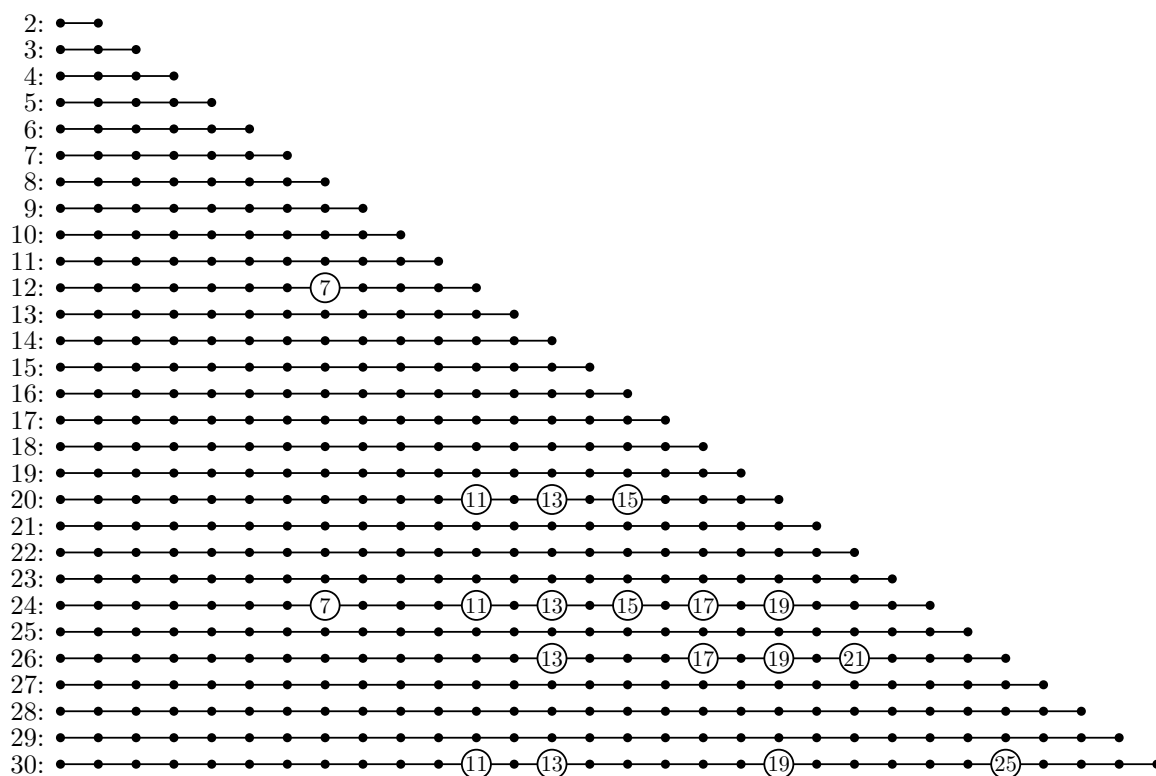
5. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho celých čísel, která nelze vyjádřit ve tvaru  $2^a + 3^b - 5^c$ , kde  $a, b, c$  jsou nezáporná celá čísla. (Ján Mazák, Tomáš Bárta)

**Řešení.** Dokážeme, že daný výraz při dělení 12 nikdy nedává zbytek 7. Čísla  $2^a$ ,  $3^b$  a  $-5^c$  dávají při dělení 12 postupně zbytky z množin  $\{1, 2, 4, 8\}$ ,  $\{1, 3, 9\}$ , a  $\{-1, -5\}$ . Pro každý součet  $s$  tří čísel z těchto množin platí  $1 + 1 - 5 \leq s \leq 8 + 9 - 1$ , tedy  $-3 \leq s \leq 16$ . Jediná možná hodnota  $s$  dávající zbytek 7 při dělení 12 je tedy  $s = 7$ . Pokud ovšem z třetí množiny vybereme  $-1$ , musíme z prvních dvou vybrat čísla se součtem 8, což zjevně nejde. Podobně dopadneme, když z třetí množiny vybereme  $-5$ . Číslo 7 tedy nikdy nevyjádříme jako součet tří čísel po jednom z každé z těchto tří množin, což dokazuje, že zkoumaný výraz nemůže být roven číslu tvaru  $12k + 7$ , kde  $k$  je celé číslo. A takových čísel je nekonečně mnoho.

*Poznámka.* Dá se ověřit, že každý jiný zbytek při dělení 12 zkoumaný výraz nabývat může. Také platí, že pro každé přirozené  $n < 12$  zkoumaný výraz může nabývat všechny možné zbytky při dělení číslem  $n$ . Naopak nejmenší  $n > 12$ , pro něž se nějaký zbytek znovu nenabývá, je rovno 20, přičemž tehdy jsou nedosažitelné dokonce tři zbytky 11, 13 a 15.

**Jiné řešení.** Zkoumejme zbytky při dělení 20. Dokážeme, že některý lichý zbytek nelze získat. Čísla  $3^b$  a  $-5^c$  dávají při dělení 20 zbytky z množin  $\{1, 3, 7, 9\}$  a  $\{-1, -5\}$ . Součet dvou čísel po jednom z těchto dvou množin nabývá nejvýše  $4 \cdot 2 = 8$  hodnot, vesměs sudých. Číslo  $2^a$  dává lichý zbytek jen pro  $a = 0$ , proto pro celý výraz  $2^a + 3^b - 5^c$  máme nejvýše 8 možných lichých zbytků, takže při dělení 20 nelze dostat nejméně dva liché zbytky.

*Poznámka.* Takové zbytky jsou dokonce tři, a sice 11, 13 a 15. Na druhé straně se dá ověřit, že všechny sudé zbytky jsou dosažitelné. (Nedosažitelné zbytky pro  $n \leq 30$  ukazuje následující schéma.)



6. Pro která přirozená čísla  $n$  lze do tabulky  $n \times n$  vepsat všechna celá čísla od 1 do  $n^2$  tak, aby aritmetický průměr čísel v každém řádku i sloupci tabulky byl celým číslem?  
(Laura Višťanová)

**Řešení.** Potřebujeme dosáhnout toho, že součet čísel v každém řádku i sloupci bude dělitelný  $n$ . Omezíme se proto na vyplňování tabulky čísly  $0, 1, \dots, n-1$ , přičemž každé z nich bude použito právě  $n$ krát (neboť tak dostaneme zbytky všech čísel od 1 do  $n^2$ ). Rozlišíme následující případy:

- ▷  $n$  je liché číslo. Uvažujme tabulku

0	1	2	...	$n-1$
0	1	2	...	$n-1$
⋮	⋮	⋮	⋱	⋮
0	1	2	...	$n-1$

V každém sloupci máme  $n$  stejných čísel, takže jejich součet je dělitelný  $n$ . Součty v řádcích jsou rovny  $0 + 1 + \dots + (n-1) = \frac{1}{2}n(n-1)$ , což je také násobek  $n$ , neboť  $n$  je liché.

- ▷  $n = 4k$  pro nějaké přirozené  $k$ . V takovém případě rozdělme tabulku  $4k \times 4k$  na  $4k^2$  čtverečků  $2 \times 2$  a uvažujme následující vzor:

$x$	$4k-x$
$4k-x$	$x$

Takových čtverečků potřebujeme umístit právě  $2k$  pro každé  $x = 1, 2, \dots, 2k-1$  a právě  $k$  pro  $x = 2k$ . Zbývá umístit čísla 0, která dáme do zbylých  $k$  čtverečků  $2 \times 2$ . Takové vyplnění tabulky bude zřejmě vyhovovat zadání, protože v každém takovémto čtverečku je součet čísel v řádcích i sloupcích dělitelný  $4k$  a jejich rozmístění v celé tabulce tuto dělitelnost neovlivní.

- ▷  $n = 4k + 2$  pro nějaké nezáporné celé  $k$ . Pro  $k = 0$  (tedy  $n = 2$ ) snadno zjistíme, že požadované vyplnění neexistuje. Nechť  $k \geq 1$ . Tehdy vyplňme podtabulku  $4 \times 4$  v levém horním rohu následovně:

1	$4k+1$	0	0
$2k$	$2k+2$	0	0
$2k+1$	0	$2k$	1
0	$2k+1$	$2k+2$	$4k+1$

Vidíme, že v každém řádku i sloupci je zatím součet čísel dělitelný  $4k+2$ . Zbytek celé tabulky se přitom dá rozdělit na čtverečky  $2 \times 2$  a podobně jako v předešlém případě vyplnit pomocí vzoru

$x$	$4k+2-x$
$4k+2-x$	$x$

Takových čtverečků potřebujeme právě  $2k$  pro  $x = 1$  a  $x = 2k$ , právě  $k$  pro  $x = 2k+1$  a právě  $2k+1$  pro každé  $x = 2, \dots, 2k-1$ . Tímto vyplněním zřejmě zajistíme, že v každém řádku i sloupci bude součet čísel dělitelný  $4k+2$ . Zbývá doplnit čísla 0 do zbylých  $k-1$  čtverečků  $2 \times 2$ , čímž dosavadní vyhovující hodnoty řádkových ani sloupcových součtů nezměníme.

Úloze tedy vyhovují všechna přirozená čísla  $n$  různá od 2.

**Jiné řešení.** Ukážeme alternativní řešení pro případy  $n = 4k$  a  $n = 4k + 2$ , kde  $k$  je přirozené číslo.

▷  $n = 4k$ :

1	$4k - 1$	2	$4k - 2$	...	$2k - 1$	$2k + 1$	$2k$	$2k$
1	$4k - 1$	2	$4k - 2$	...	$2k - 1$	$2k + 1$	$2k$	$2k$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮	⋮
1	$4k - 1$	2	$4k - 2$	...	$2k - 1$	$2k + 1$	$2k$	$2k$
1	$4k - 1$	2	$4k - 2$	...	$2k - 1$	$2k + 1$	0	0
1	$4k - 1$	2	$4k - 2$	...	$2k - 1$	$2k + 1$	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮	⋮
1	$4k - 1$	2	$4k - 2$	...	$2k - 1$	$2k + 1$	0	0
1	$4k - 1$	2	$4k - 2$	...	$2k - 1$	$2k + 1$	0	0

Vidíme, že čísla v řádcích se dají spárovat do dvojic se součtem dělitelným  $4k$ , takže jejich celkový součet je dělitelný  $4k$ . V prvních  $4k - 2$  sloupcích máme po  $4k$  stejných čísel, takže jejich součet je také násobek čísla  $4k$ . Součty v posledních dvou sloupcích jsou rovny  $2k \cdot 2k = 4k^2$ , což je rovněž číslo dělitelné  $4k$ .

▷  $n = 4k + 2$ .

Všimněme si nejprve, že libovolná čísla  $a_1, a_2, \dots, a_l$ , přičemž každé z nich máme k dispozici  $l$ krát, dovedeme umístit do tabulky  $l \times l$  tak, že součet čísel v každém řádku i sloupci bude stejný:

$$t(a_1, a_2, \dots, a_l) = \begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & \dots & a_{l-1} & a_l \\ a_2 & a_3 & \dots & a_l & a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{l-1} & a_l & \dots & a_{l-3} & a_{l-2} \\ a_l & a_1 & \dots & a_{l-2} & a_{l-1} \end{array}$$

Tuto konstrukci využijeme takto: Rozdělme množinu  $\{0, 1, \dots, 4k + 1\} \setminus \{0, 2k + 1\}$  libovolným způsobem na dvě disjunktní skupiny  $A, B$  takové, že  $|A| = 2k - 1$  (tedy  $|B| = 2k + 1$ ). Nyní vytvoříme čtyři posloupnosti  $2k + 1$  čísel

$$0, 0, A, \quad 2k + 1, 2k + 1, A, \quad B, \quad B,$$

přičemž pro každou z nich vytvoříme popsáním způsobem tabulku  $(2k + 1) \times (2k + 1)$ . Tyto čtyři tabulky pak dáme k sobě do konečné tabulky  $(4k + 2) \times (4k + 2)$  takto:

$$\begin{array}{cc} t(0, 0, A) & t(B) \\ t(B) & t(2k + 1, 2k + 1, A) \end{array}$$

V takové tabulce je každé z čísel  $0, 1, \dots, 4k + 1$  použito právě  $(4k + 2)$ -krát. Zbývá ověřit, že součty ve všech řádcích a sloupcích jsou dělitelné číslem  $4k + 2$ . Součet čísel v posloupnostech  $A, B$  je dohromady roven  $s = 1 + \dots + (4k + 1) - (2k + 1) = 2k(4k + 2)$ , takže je dělitelný  $4k + 2$ . Jednotlivé řádky a sloupce výsledné tabulky mají součty  $s$  (prvních  $2k + 1$  řádků a sloupců) a  $s + 4k + 2$  (zbývajících řádky a sloupců), takže i ty jsou dělitelné číslem  $4k + 2$ , proto vytvořená tabulka opravdu vyhovuje zadání.