68. ročník matematické olympiády
III. kolo kategorie A

Benešov, 24.–27. března 2019

1. *V oboru reálných čísel řešte soustavu*

$$\begin{aligned} x^2 - yz &= |y - z| + 1, \\ y^2 - zx &= |z - x| + 1, \\ z^2 - xy &= |x - y| + 1. \end{aligned}$$

(Tomáš Jurík)

Řešení. Daná soustava rovnic je symetrická, takže stačí hledat jen ta řešení, jež splňují nerovnosti $x \geqq y \geqq z$. Za tohoto předpokladu můžeme odstranit absolutní hodnoty, a tak dostaneme

$$x^2 - yz = y - z + 1, \tag{1}$$
$$y^2 - zx = x - z + 1, \tag{2}$$
$$z^2 - xy = x - y + 1. \tag{3}$$

Postupným odečtením rovnic (1) a (2), resp. (2) a (3) dostáváme po snadných úpravách rovnice

$$\begin{aligned} (x - y)(x + y + z + 1) &= 0, \\ (y - z)(x + y + z - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Odtud plyne, že všechna tři čísla x, y, z nemohou být navzájem různá, nemohou však být ani všechna stejná, protože to bychom v původních rovnicích dostali $0 = 1$. Právě dvě z nich jsou tedy různá, takže platí buď $x = y > z$ a $x + y + z = 1$, nebo $x > y = z$ a $x + y + z = -1$.

Všimněme si, že trojice (x, y, z) vyhovuje původní soustavě, právě když jí vyhovuje „opačná" trojice $(-z, -y, -x)$. Přechod k opačné trojici nemění zavedené uspořádání čísel v trojici a převádí druhý případ z předchozího odstavce na první z nich.

Stačí proto vyřešit první případ, kdy $x = y > z$ a $x + y + z = 1$. To nám dává $z = 1 - 2x$. Dosazením například do rovnice (1) dostaneme po úpravě $x(3x - 4) = 0$, takže $x = 0$ nebo $x = \frac{4}{3}$. Tomu odpovídají trojice (x, y, z) rovné $(0, 0, 1)$ a $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{5}{3}\right)$. První trojice zřejmě nesplňuje předpoklad $x \geqq y \geqq z$, a tak původní soustavě vyhovuje jen druhá trojice (zkouška při uvedeném postupu není nutná).

S přihlédnutím ke změnám pořadí neznámých a přechodům k opačným trojicím má soustava 6 řešení:

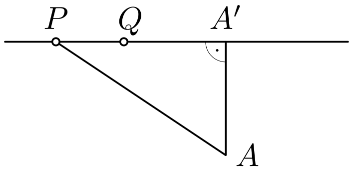
$$\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{5}{3}\right),\ \left(-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right),\ \left(\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right),$$
$$\left(\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right),\ \left(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right),\ \left(-\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{4}{3}\right).$$

2. *Je dán pravoúhelník $ABCD$, kde $|AB| = a \geqq b = |BC|$. Na přímce BD sestrojte body P a Q tak, aby platilo $|AP| = |PQ| = |QC|$. Proveďte diskusi o počtu řešení vzhledem k délkám a, b.* (Jaroslav Švrček)

Řešení. Všimněme si nejdříve, že se ani zadání úlohy bez podmínky $a \geqq b$, ani množina dvojic bodů (P, Q), které jsou jejími řešeními, nezmění, pokud navzájem vyměníme označení vrcholů B a D. Podmínku $a \geqq b$ proto uplatníme až k jednoduššímu zápisu závěrečné diskuse o počtu řešení.

Označme A' a C' kolmé průměty bodů A a C na přímku BD. Zřejmě oba průměty padnou dovnitř úsečky BD a platí $|AA'| = |CC'|$. Předpokládejme, že body P a Q mají požadované vlastnosti. Jelikož $|AP| = |CQ|$, je $P = A'$, právě když $Q = C'$. Nastane-li tato situace, budou body P, Q (coby body A', C') souměrně sdružené podle středu S úsečky BD. Totéž bude o bodech P, Q platit i v případě, kdy $A' = C'$ $(= S)$ — tehdy jsou pravoúhlé trojúhelníky APS, CQS shodné podle věty Ssu, takže $|PS| = |QS|$, pričemž nemůže být $P = Q$.

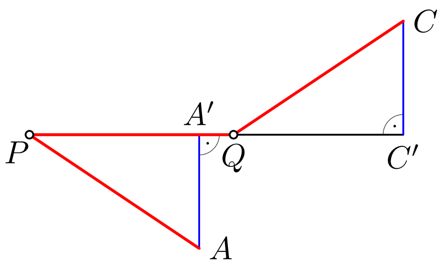
Tyto „symetrické“ případy $P = A'$, $Q = C'$, $A' = C'$ tedy z dalšího *rozboru* vyloučíme. Právě tak vyloučíme i možnost, že by bod Q ležel na úsečce $A'P$, protože by pak podle obr. 1 platilo $|AP| > |A'P| \geqq |PQ|$, což odporuje požadavkům úlohy. A symetricky ani bod P nemůže ležet na úsečce QC'. V rozboru opakovaně využijeme rovnost $|A'P| = |C'Q|$, která plyne z trojúhelníků $A'PA$ a $C'QC$, jež se shodují podle věty Ssu.



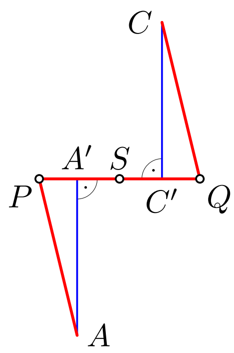
Obr. 1

Za předpokladů $P \neq A'$, $Q \neq C'$, $A' \neq C'$, $Q \notin A'P$ a $P \notin C'Q$ rozlišíme možné polohy bodů P, Q na přímce $A'C'$ následovně:

1. P leží na polopřímce opačné k polopřímce $A'C'$:
   a) Q leží na úsečce $A'C'$ (obr. 2). Potom z $|A'P| = |C'Q|$ máme $|PQ| = |A'C'|$, takže $|AP| = |A'C'|$.
   b) Q leží na polopřímce opačné k polopřímce $C'P$ (obr. 3). Tehdy z $|A'P| = |C'Q|$ máme, že body P, Q jsou souměrně sdružené podle středu S úsečky $A'C'$ neboli středu úhlopříčky BD.

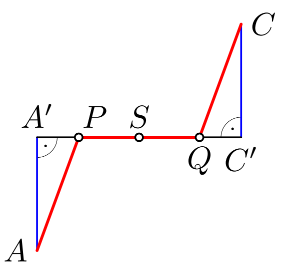


Obr. 2

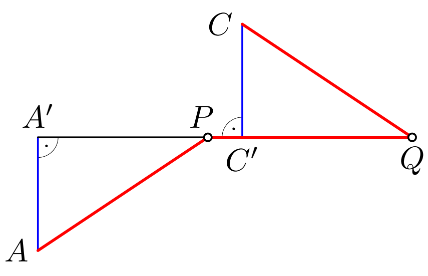


Obr. 3

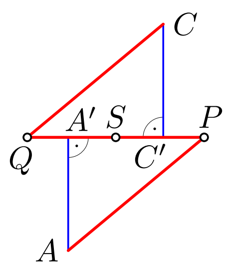
2. P leží na úsečce $A'C'$:
   a) Q leží na úsečce $C'P$ (obr. 4). Tehdy podobně jako v případě 1b máme, že body P, Q jsou souměrně sdružené podle středu S úhlopříčky BD.
   b) Q leží na polopřímce opačné k polopřímce $C'P$ (obr. 5). Tehdy podobně jako v případě 1a máme $|AP| = |A'C'|$.



Obr. 4



Obr. 5

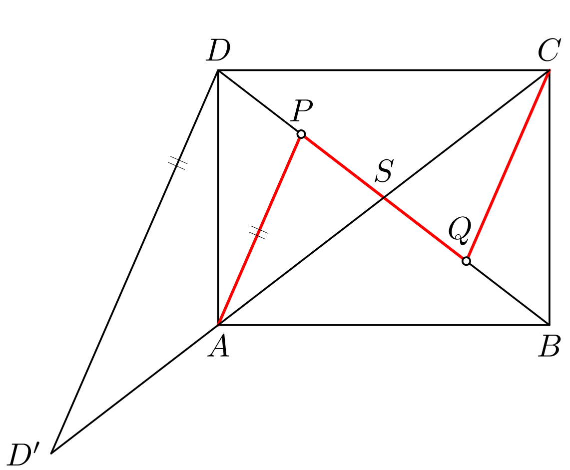


Obr. 6

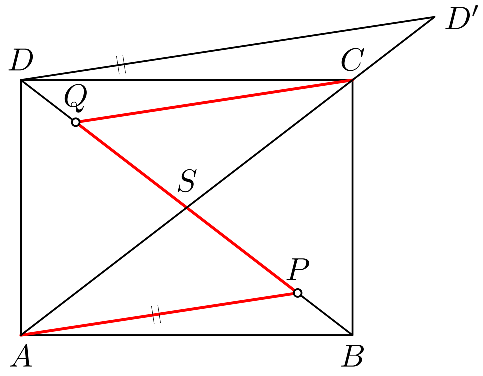
3. P leží na polopřímce opačné k polopřímce $C'A'$:
   Bod Q pak musí ležet na polopřímce opačné k polopřímce $A'C'$ (obr. 6). Podobně jako v případě 1b tak máme, že body P, Q jsou souměrně sdružené podle středu S úhlopříčky BD.

Dokázali jsme, že buď jsou body P, Q souměrně sdružené podle středu S, nebo platí $|AP| = |A'C'|$. Popíšeme nejprve *konstrukci* v prvním případě, který zahrnuje i situace, kdy $P = A'$, $Q = C'$ nebo $A' = C'$, jež jsme úvodem z našeho rozboru vyloučili. Tehdy platí $|AP| = |PQ| = 2|PS|$. Naopak, pokud některý bod P přímky BD bude splňovat rovnost $|AP| = 2|PS|$, tak k němu jednoznačně sestrojíme bod Q souměrně sdružený podle středu S, přičemž bude platit $|AP| = |PQ| = |QC|$. Zaměříme se tedy na konstrukci bodu P.

Označme D' průsečík přímky AC a rovnoběžky s AP bodem D. Trojúhelníky SPA a SDD' jsou stejnolehlé se středem S. Jelikož $|AP| = 2|PS|$, je $|DD'| = 2|DS|$. Odtud již plyne konstrukce, v níž nejprve sestrojíme bod D'. Takové body jsou vždy dva, přičemž jeden leží na polopřímce SA (obr. 7) a druhý na polopřímce SC (obr. 8). Následně sestrojíme bod P jako průsečík rovnoběžky bodem A s přímkou DD'. Jelikož máme dvě možné polohy bodu D', budeme mít dvě možné polohy bodu P, a tak v tomto případě budou existovat vždy právě dvě řešení.

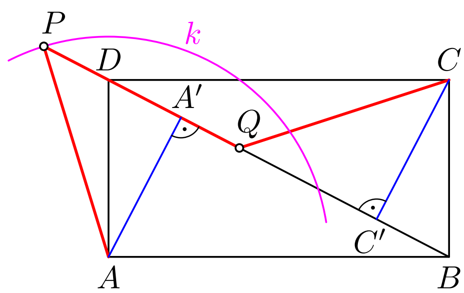


Obr. 7

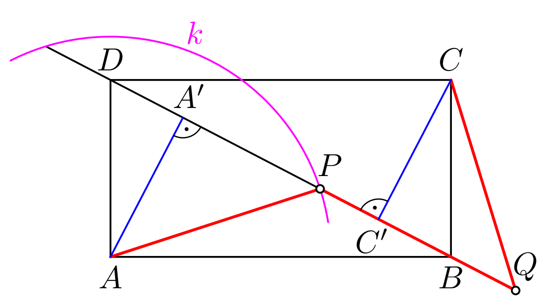


Obr. 8

V druhém případě $|AP| = |A'C'|$ můžeme již předpokládat, že $A' \neq C'$. Podle rovnosti $|AP| = |A'C'|$ snadno najdeme bod P jako průsečík přímky BD s kružnicí $k(A, |A'C'|)$. V případě $|A'C'| > |AA'|$ dostaneme dva průsečíky neboli dvě řešení, v případě $|A'C'| = |AA'|$ jedno řešení a konečně žádné řešení v případě $|A'C'| < |AA'|$. Možná řešení odpovídají případu 1a (obr. 9), resp. 2b (obr. 10). V obou z nich je poloha bodu Q určena jednoznačně a snadno zpětně ukážeme, že platí $|AP| = |PQ| = |QC|$.

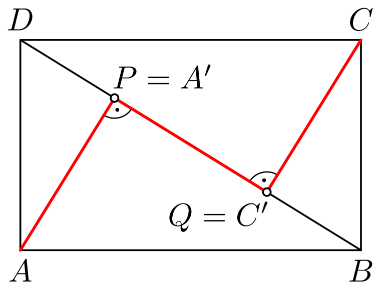


Obr. 9

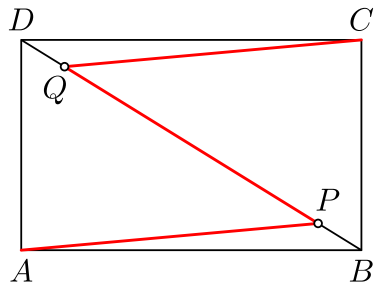


Obr. 10

Posoudíme nyní, kdy některá řešení z prvního a druhého případu splývají. Mají-li body P, Q souměrně sdružené podle středu S navíc splňovat i podmínku $|PQ| = |AP| = |A'C'|$, stane se tak jedině v situaci, kdy $\{P, Q\} = \{A', C'\}$. Ta je zřejmě možná, pouze když $P = A'$ a $Q = C'$, což vede k rovnosti $|A'C'| = |AA'|$. Ta však znamená právě to, že kružnice k se dotýká přímky BD v bodě A', a proto (jediné) řešení z druhého případu splývá s tím ze dvou řešení prvního případu, při kterém $P = A'$. Úloha pak má celkem dvě řešení (obr. 11 a 12).



Obr. 11



Obr. 12

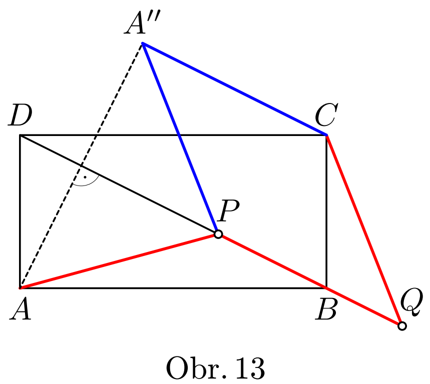
Zjistili jsme, že počet řešení z druhého případu, stejně jako splynutí jediného jeho řešení s jedním řešením prvního případu, závisí na poměru $|A'C'| : |AA'|$, který stačí vyjádřit pomocí poměru $p = a : b$ pouze v případě, kdy $a \geqq b$ neboli $p \geqq 1$. Podle Eukleidovy věty o odvěsně platí $|DA'| = b^2/|BD| \leqq a^2/|BD| = |DC'|$, odkud $|A'C'| = (a^2 - b^2)/|BD|$. Dále $|AA'| = 2S_{ABD}/|BD| = ab/|BD|$, takže

$$|A'C'| : |AA'| = \frac{a^2 - b^2}{ab} = p - \frac{1}{p}.$$

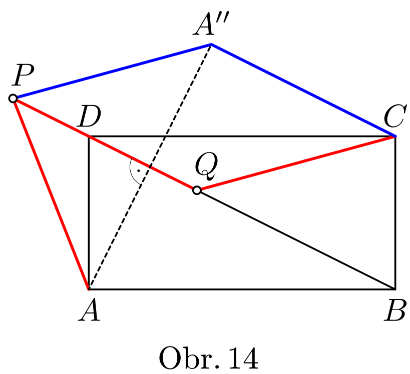
Přitom $p - 1/p \geqq 1$, právě když $p \geqq \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$, což je hodnota takzvaného *zlatého řezu* označovaného φ. Výsledky lze shrnout takto:

$$\frac{a}{b} > \varphi\colon\ 4 \text{ řešení}, \qquad 1 \leqq \frac{a}{b} \leqq \varphi\colon\ 2 \text{ řešení}.$$

Poznámka 1. Namísto zkoumání délek na přímce $A'C'$ jsme mohli zkoumat úhly. Díky shodnosti trojúhelníků APA', CQC' totiž platí $|\sphericalangle APQ| = |\sphericalangle CQP|$ nebo $|\sphericalangle APQ| + |\sphericalangle CQP| = 180°$. Pomocí toho se dá vyšetřit, že v případech 1b, 2a, 3 tvoří body A, C, P, Q rovnoběžník s úhlopříčkami AC, PQ, takže P, Q jsou souměrně sdružené podle středu S. Dále v případech 1a (obr. 13) a 2b (obr. 14) můžeme definovat A'' jako obraz bodu A v osové souměrnosti podle přímky BD a dokázat, že body A'', P, Q, C tvoří kosočtverec, v němž $|A''P| = |A''C|$, což už dává návod, jak sestrojit bod P.

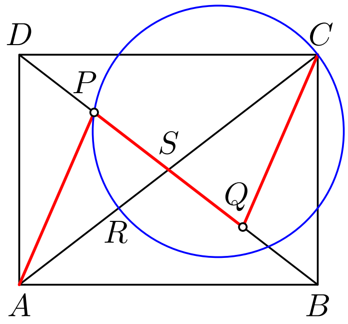


Obr. 13

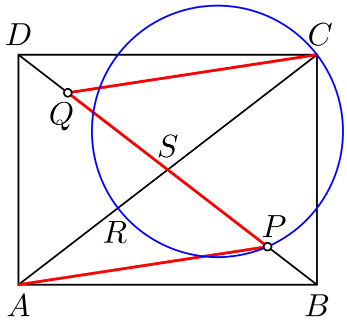


Obr. 14

Poznámka 2. Konstrukci v symetrickém případě jsme mohli provést i pomocí *Apolloniovy kružnice*. Hledáme množinu bodů P takových, že $|AP| = 2|PS|$. Sestrojíme tedy bod R na úsečce AS takový, že $|AR| = 2|RS|$. Dále platí $|AC| = 2|SC|$. Je známo, že hledaná množina bodů je kružnice nad průměrem RC. Tato kružnice protíná polopřímku SD v jednom bodě (obr. 15) a polopřímku SB v druhém bodě (obr. 16).



Obr. 15



Obr. 16

---

3. *Nechť a, b, c, n jsou kladná celá čísla taková, že jsou splněny následující podmínky:*
(i) *čísla a, b, c, $a+b+c$ jsou po dvou nesoudělná;*
(ii) *číslo $(a+b+c)(a+b)(b+c)(c+a)(ab+bc+ca)$ je n-tou mocninou celého čísla.*

Dokažte, že součin abc lze zapsat jako rozdíl dvou n-tých mocnin celých čísel.
(Patrik Bak)

Řešení. Dokážeme, že čísla $A=(a+b+c)(ab+bc+ca)$ a $B=(a+b)(b+c)(c+a)$ jsou nesoudělná. Předpokládejme, že tomu tak není. Pak existuje prvočíslo p, jež dělí obě čísla A, B. Jelikož $p \mid B$, tak p dělí alespoň jedno z čísel $a+b$, $b+c$, $c+a$. Bez újmy na obecnosti nechť je to $a+b$. Pak ale nemůže platit $p \mid a+b+c$, neboť by bylo $p \mid c$, což je ve sporu s předpokladem (i). Nutně tedy $p \mid ab+bc+ca = ab+c(a+b)$, z čehož plyne $p \mid ab$, takže p dělí alespoň jedno z čísel a, b, což spolu s relací $p \mid a+b$ znamená, že dělí obě čísla a, b, což je opět ve sporu s (i).

Čísla A, B jsou tedy opravdu nesoudělná a navíc jejich součin AB je podle předpokladu (ii) n-tá mocnina celého čísla. Proto musí i každé z čísel A, B být n-tou mocninou celého čísla. Jenže $abc = A-B$, takže je to opravdu rozdíl dvou n-tých mocnin celých čísel. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

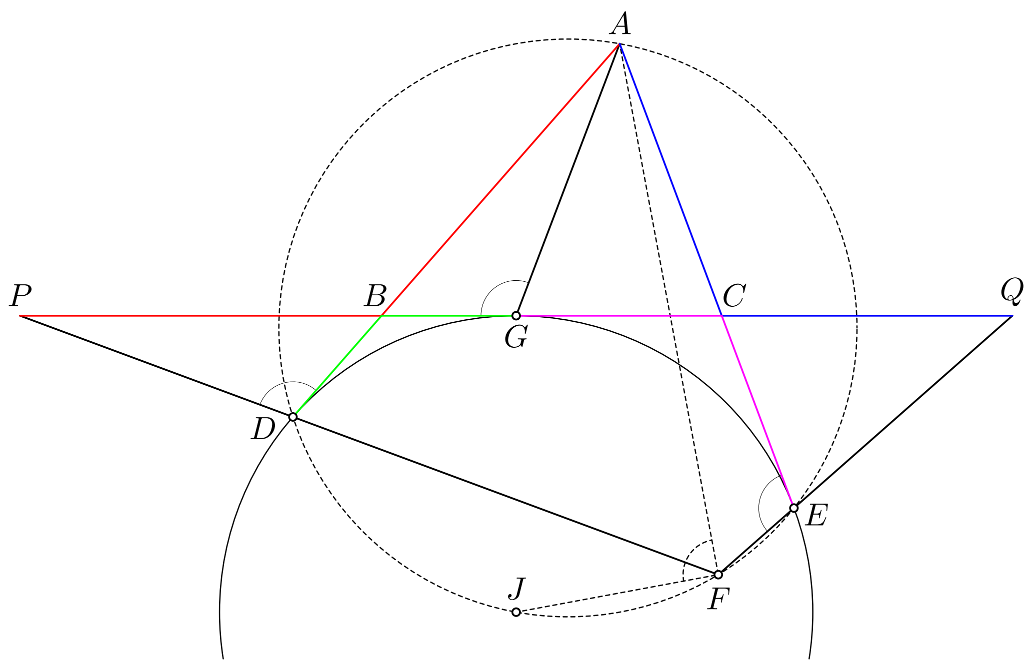
Poznámka. Trojice $(a,b,c)=(341,447,1235)$ vyhovuje zadání pro $n=2$.

---

4. *Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Na polopřímce opačné k polopřímce BC leží bod P takový, že $|AB|=|BP|$. Analogicky na polopřímce opačné k polopřímce CB leží bod Q takový, že $|AC|=|CQ|$. Označme J střed kružnice připsané straně BC daného trojúhelníku a D, E po řadě její body dotyku s přímkami AB a AC. Předpokládejme, že polopřímky opačné k polopřímkám DP a EQ se protínají v bodě F různém od J. Dokažte, že $AF \perp FJ$.* (Patrik Bak)

Řešení. Jelikož body A, D, E, J leží na kružnici s průměrem AJ, stačí k důkazu kolmosti $AF \perp FJ$ ověřit, že na téže kružnici leží i bod F (obr. 17). Nechť G je dotykový bod uvažované připsané kružnice se stranou BC. Potom z rovností $|AB|=|BP|$ a $|BD|=|BG|$ plyne shodnost trojúhelníků $ABG \cong PBD$ (sus) a podobně z rovností $|AC|=|CQ|$ a $|CE|=|CG|$ shodnost $ACG \cong QCE$. Postupně tak dostáváme $|\sphericalangle AEF| = 180^\circ - |\sphericalangle CEQ| = 180^\circ - |\sphericalangle CGA| = |\sphericalangle BGA| = |\sphericalangle BDP| = |\sphericalangle ADP|$. Odtud $|\sphericalangle AEF| + |\sphericalangle ADF| = 180^\circ$, což už znamená, že bod F leží s body A, E, D na téže kružnici, jak jsme potřebovali dokázat.

Poznámka. Potřebný závěr, že čtyřúhelník $ADFE$ je tětivový, lze odvodit, jak nyní ukážeme, i pomocí druhé dvojice jeho protějších vnitřních úhlů při vrcholech A a F. Ze shodnosti trojúhelníků $ABG \cong PBD$ a $ACG \cong QCE$ plyne, že $|\sphericalangle DAE| = |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BAG| + |\sphericalangle GAC| = |\sphericalangle BPD| + |\sphericalangle CQE| = |\sphericalangle QPF| + |\sphericalangle PQF| = 180^\circ - |\sphericalangle PFQ| = 180^\circ - |\sphericalangle DFE|$ neboli $|\sphericalangle DAE| + |\sphericalangle DFE| = 180^\circ$.



Obr. 17

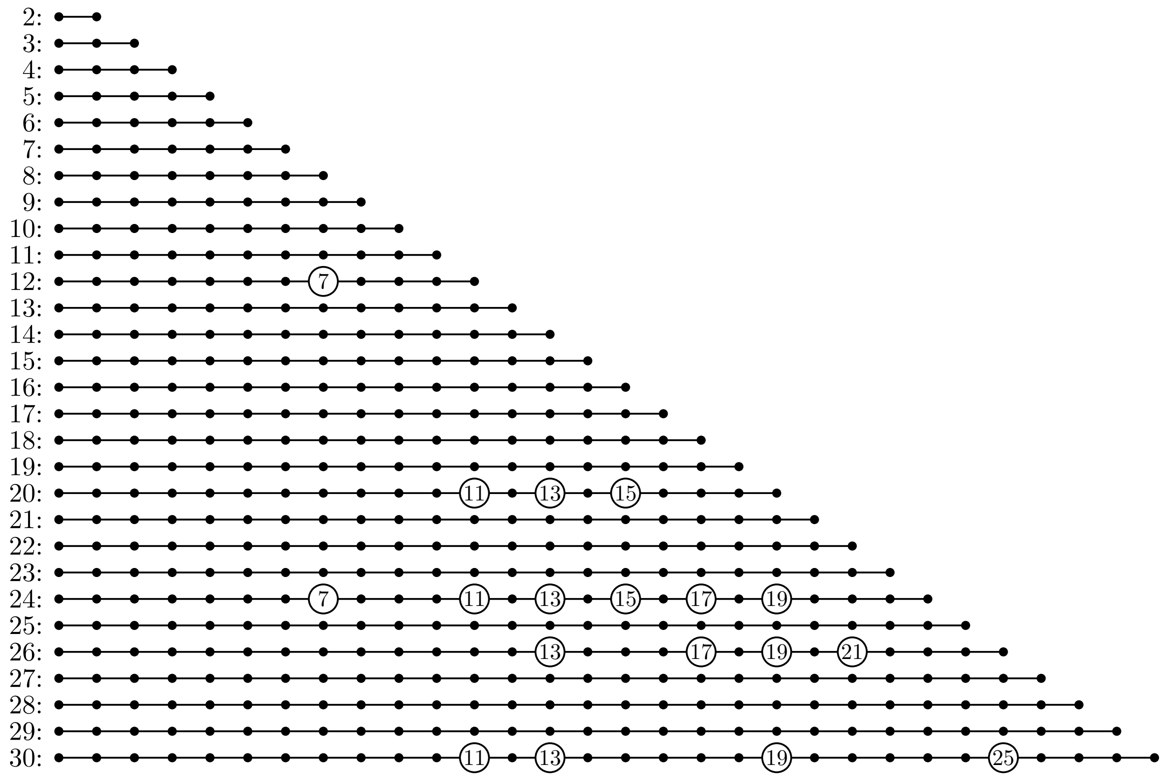
5. *Dokažte, že existuje nekonečně mnoho celých čísel, která nelze vyjádřit ve tvaru $2^a + 3^b - 5^c$, kde a, b, c jsou nezáporná celá čísla.* (Ján Mazák, Tomáš Bárta)

Řešení. Dokážeme, že daný výraz při dělení 12 nikdy nedává zbytek 7. Čísla 2^a, 3^b a -5^c dávají při dělení 12 postupně zbytky z množin $\{1, 2, 4, 8\}$, $\{1, 3, 9\}$, a $\{-1, -5\}$. Pro každý součet s tří čísel z těchto množin platí $1+1-5 \leqq s \leqq 8+9-1$, tedy $-3 \leqq s \leqq 16$. Jediná možná hodnota s dávající zbytek 7 při dělení 12 je tedy $s = 7$. Pokud ovšem z třetí množiny vybereme -1, musíme z prvních dvou vybrat čísla se součtem 8, což zjevně nejde. Podobně dopadneme, když z třetí množiny vybereme -5. Číslo 7 tedy nikdy nevyjádříme jako součet tří čísel po jednom z každé z těchto tří množin, což dokazuje, že zkoumaný výraz nemůže být roven číslu tvaru $12k + 7$, kde k je celé číslo. A takových čísel je nekonečně mnoho.

Poznámka. Dá se ověřit, že každý jiný zbytek při dělení 12 zkoumaný výraz nabývat může. Také platí, že pro každé přirozené $n < 12$ zkoumaný výraz může nabývat všechny možné zbytky při dělení číslem n. Naopak nejmenší $n > 12$, pro něž se nějaký zbytek znovu nenabývá, je rovno 20, přičemž tehdy jsou nedosažitelné dokonce tři zbytky 11, 13 a 15.

Jiné řešení. Zkoumejme zbytky při dělení 20. Dokážeme, že některý lichý zbytek nelze získat. Čísla 3^b a -5^c dávají při dělení 20 zbytky z množin $\{1, 3, 7, 9\}$ a $\{-1, -5\}$. Součet dvou čísel po jednom z těchto dvou množin nabývá nejvýše $4 \cdot 2 = 8$ hodnot, vesměs sudých. Číslo 2^a dává lichý zbytek jen pro $a = 0$, proto pro celý výraz $2^a + 3^b - 5^c$ máme nejvýše 8 možných lichých zbytků, takže při dělení 20 nelze dostat nejméně dva liché zbytky.

Poznámka. Takové zbytky jsou dokonce tři, a sice 11, 13 a 15. Na druhé straně se dá ověřit, že všechny sudé zbytky jsou dosažitelné. (Nedosažitelné zbytky pro $n \leqq 30$ ukazuje následující schéma.)



---

6. *Pro která přirozená čísla n lze do tabulky $n \times n$ vepsat všechna celá čísla od* 1 *do* n^2 *tak, aby aritmetický průměr čísel v každém řádku i sloupci tabulky byl celým číslem?*

(Laura Vištanová)

Řešení. Potřebujeme dosáhnout toho, že součet čísel v každém řádku i sloupci bude dělitelný n. Omezíme se proto na vyplňování tabulky čísly $0, 1, \ldots, n-1$, přičemž každé z nich bude použito právě $n$krát (neboť tak dostaneme zbytky všech čísel od 1 do n^2). Rozlišíme následující případy:

▷ n je liché číslo. Uvažujme tabulku

$$\begin{array}{|cccccc|}\hline 0 & 1 & 2 & \ldots & n-1 \\ 0 & 1 & 2 & \ldots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \ldots & n-1 \\ \hline\end{array}$$

V každém sloupci máme n stejných čísel, takže jejich součet je dělitelný n. Součty v řádcích jsou rovny $0 + 1 + \ldots + (n-1) = \frac{1}{2}n(n-1)$, což je také násobek n, neboť n je liché.

▷ $n = 4k$ pro nějaké přirozené k. V takovém případě rozdělme tabulku $4k \times 4k$ na $4k^2$ čtverečků 2×2 a uvažujme následující vzor:

$$\begin{array}{|cc|}\hline x & 4k-x \\ 4k-x & x \\ \hline\end{array}$$

Takových čtverečků potřebujeme umístit právě $2k$ pro každé $x = 1, 2, \ldots, 2k-1$ a právě k pro $x = 2k$. Zbývá umístit čísla 0, která dáme do zbylých k čtverečků 2×2. Takové vyplnění tabulky bude zřejmě vyhovovat zadání, protože v každém takovémto čtverečku je součet čísel v řádcích i sloupcích dělitelný $4k$ a jejich rozmístění v celé tabulce tuto dělitelnost neovlivní.

▷ $n = 4k + 2$ pro nějaké nezáporné celé k. Pro $k = 0$ (tedy $n = 2$) snadno zjistíme, že požadované vyplnění neexistuje. Nechť $k \geqq 1$. Tehdy vyplňme podtabulku 4×4 v levém horním rohu následovně:

1	$4k+1$	0	0
$2k$	$2k+2$	0	0
$2k+1$	0	$2k$	1
0	$2k+1$	$2k+2$	$4k+1$

Vidíme, že v každém řádku i sloupci je zatím součet čísel dělitelný $4k + 2$. Zbytek celé tabulky se přitom dá rozdělit na čtverečky 2×2 a podobně jako v předešlém případě vyplnit pomocí vzoru

x	$4k+2-x$
$4k+2-x$	x

Takových čtverečků potřebujeme právě $2k$ pro $x = 1$ a $x = 2k$, právě k pro $x = 2k+1$ a právě $2k+1$ pro každé $x = 2, \ldots, 2k-1$. Tímto vyplněním zřejmě zajistíme, že v každém řádku i sloupci bude součet čísel dělitelný $4k+2$. Zbývá doplnit čísla 0 do zbylých $k-1$ čtverečků 2×2, čímž dosavadní vyhovující hodnoty řádkových ani sloupcových součtů nezměníme.

Úloze tedy vyhovují všechna přirozená čísla n různá od 2.

Jiné řešení. Ukážeme alternativní řešení pro případy $n = 4k$ a $n = 4k + 2$, kde k je přirozené číslo.

▷ $n = 4k$:

1	$4k-1$	2	$4k-2$	$\ldots$	$2k-1$	$2k+1$	$2k$	$2k$
1	$4k-1$	2	$4k-2$	$\ldots$	$2k-1$	$2k+1$	$2k$	$2k$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	$4k-1$	2	$4k-2$	$\ldots$	$2k-1$	$2k+1$	$2k$	$2k$
1	$4k-1$	2	$4k-2$	$\ldots$	$2k-1$	$2k+1$	0	0
1	$4k-1$	2	$4k-2$	$\ldots$	$2k-1$	$2k+1$	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	$4k-1$	2	$4k-2$	$\ldots$	$2k-1$	$2k+1$	0	0
1	$4k-1$	2	$4k-2$	$\ldots$	$2k-1$	$2k+1$	0	0

Vidíme, že čísla v řádcích se dají spárovat do dvojic se součtem dělitelným $4k$, takže jejich celkový součet je dělitelný $4k$. V prvních $4k - 2$ sloupcích máme po $4k$ stejných čísel, takže jejich součet je také násobek čísla $4k$. Součty v posledních dvou sloupcích jsou rovny $2k \cdot 2k = 4k^2$, což je rovněž číslo dělitelné $4k$.

▷ $n = 4k + 2$.

Všimněme si nejprve, že libovolná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_l$, přičemž každé z nich máme k dispozici $l$krát, dovedeme umístit do tabulky $l \times l$ tak, že součet čísel v každém řádku i sloupci bude stejný:

$$t(a_1, a_2, \ldots, a_l) = \boxed{\begin{matrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_{l-1} & a_l \\ a_2 & a_3 & \ldots & a_l & a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{l-1} & a_l & \ldots & a_{l-3} & a_{l-2} \\ a_l & a_1 & \ldots & a_{l-2} & a_{l-1} \end{matrix}}$$

Tuto konstrukci využijeme takto: Rozdělme množinu $\{0,1,\ldots,4k+1\}\setminus\{0,2k+1\}$ libovolným způsobem na dvě disjunktní skupiny A, B takové, že $|A| = 2k-1$ (tedy $|B| = 2k+1$). Nyní vytvoříme čtyři posloupnosti $2k+1$ čísel

$$0,0,A, \quad 2k+1,2k+1,A, \quad B, \quad B,$$

přičemž pro každou z nich vytvoříme popsaným způsobem tabulku $(2k+1)\times(2k+1)$. Tyto čtyři tabulky pak dáme k sobě do konečné tabulky $(4k+2)\times(4k+2)$ takto:

$$\boxed{\begin{matrix} t(0,0,A) & t(B) \\ t(B) & t(2k+1,2k+1,A) \end{matrix}}$$

V takové tabulce je každé z čísel $0,1,\ldots,4k+1$ použito právě $(4k+2)$-krát. Zbývá ověřit, že součty ve všech řádcích a sloupcích jsou dělitelné číslem $4k+2$. Součet čísel v posloupnostech A, B je dohromady roven $s = 1+\ldots+(4k+1)-(2k+1) = 2k(4k+2)$, takže je dělitelný $4k+2$. Jednotlivé řádky a sloupce výsledné tabulky mají součty s (prvních $2k+1$ řádků a sloupců) a $s+4k+2$ (zbývající řádky a sloupce), takže i ty jsou dělitelné číslem $4k+2$, proto vytvořená tabulka opravdu vyhovuje zadání.