8$^{\text{TH}}$ Czech-Polish-Slovak Junior Mathematical Match

Zuberec (Slovakia), 20$^{\text{TH}}$ May 2019 — Individual Competition

1. Find all pairs of positive integers a, b such that
$$\sqrt{a+2\sqrt{b}}=\sqrt{a-2\sqrt{b}}+\sqrt{b}.$$

2. Let ABC be a triangle with centroid T. Denote by M the midpoint of BC. Let D be a point on the ray opposite to the ray BA such that $AB=BD$. Similarly, let E be a point on the ray opposite to the ray CA such that $AC=CE$. The segments TD and TE intersect the side BC in P and Q, respectively. Show that the points P, Q and M split the segment BC into four parts of equal length.

3. Determine all positive integers n such that it is possible to fill the $n\times n$ table with numbers 1, 2 and -3 so that the sum of the numbers in each row and each column is 0.

4. Let k be a circle with diameter AB. A point C is chosen inside the segment AB and a point D is chosen on k such that BCD is an acute-angled triangle, with circumcentre denoted by O. Let E be the intersection of the circle k and the line BO (different from B). Show that the triangles BCD and ECA are similar.

5. Given is a group in which everyone has exactly d friends and every two strangers have exactly one common friend. Prove that there are at most d^2+1 people in this group.

Time: 3 hours 30 minutes

8. Česko-Polsko-Slovenské Střetnutí Juniorů

Zuberec (Slovensko), 20. května 2019 — Soutěž jednotlivců

1. Určete všechny dvojice kladných celých čísel a, b, pro něž platí
$$\sqrt{a+2\sqrt{b}}=\sqrt{a-2\sqrt{b}}+\sqrt{b}.$$

2. Je dán trojúhelník ABC s těžištěm T. Označme M střed strany BC. Na polopřímce opačné k BA leží takový bod D, že $|AB|=|BD|$. Podobně na polopřímce opačné k CA leží takový bod E, že $|AC|=|CE|$. Úsečky TD, TE protínají stranu BC po řadě v bodech P, Q. Dokažte, že body P, Q, M dělí úsečku BC na čtyři stejně dlouhé části.

3. Pro která přirozená čísla n lze tabulku $n\times n$ vyplnit čísly 1, 2 a -3 tak, aby součet čísel v každém řádku i v každém sloupci byl 0?

4. Je dána kružnice k a její průměr AB. Uvnitř úsečky AB zvolíme libovolný bod C a pak na kružnici k vybereme bod D tak, aby vznikl ostroúhlý trojúhelník BCD, jehož opsaná kružnice má střed v bodě, který označíme O. Nechť ještě E značí průsečík kružnice k s přímkou BO (různý od bodu B). Dokažte, že trojúhelníky BCD a ECA jsou podobné.

5. V jisté skupine osob má každý právě d známých a současně každé dvě osoby, které se neznají, mají právě jednoho společného přítele. Dokažte, že počet osob v této skupině není větší než d^2+1.

Čas: 3 hodiny 30 minut

8. Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne Juniorów

Zuberec (Słowacja), 20 maja 2019 — Zawody indywidualne

1. Wyznacz wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych a, b, dla których

$$\sqrt{a+2\sqrt{b}} = \sqrt{a-2\sqrt{b}} + \sqrt{b}.$$

2. Punkt T jest środkiem ciężkości trójkąta ABC, a punkt M jest środkiem boku BC. Oznaczmy przez D taki punkt prostej AB różny od A, że $AB = BD$. Podobnie niech E będzie takim punktem prostej AC różnym od A, że $AC = CE$. Odcinki TD i TE przecinają bok BC odpowiednio w punktach P i Q. Wykaż, że punkty P, Q, M dzielą odcinek BC na cztery części o równych długościach.

3. Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite n o tej własności, że tablicę o wymiarach $n \times n$ można wypełnić liczbami 1, 2 oraz -3 w taki sposób, aby w każdym wierszu i w każdej kolumnie suma wpisanych liczb była równa 0.

4. Niech k będzie okręgiem o średnicy AB. Punkt C wybrano wewnątrz odcinka AB, a punkt D na okręgu k w taki sposób, że trójkąt BCD jest ostrokątny. Oznaczmy środek okręgu opisanego na tym trójkącie przez O, a (różny od B) punkt przecięcia okręgu k z prostą BO przez E. Wykaż, że trójkąty BCD oraz ECA są podobne.

5. W pewnej grupie każdy ma dokładnie d znajomych oraz każde dwie osoby, które się nie znają, mają dokładnie jednego wspólnego znajomego. Wykaż, że liczba osób w tej grupie nie przekracza $d^2 + 1$.

Czas: 3 godziny 30 minut

8. Česko-poľsko-slovenské stretnutie juniorov

Zuberec (Slovensko), 20. mája 2019 — Súťaž jednotlivcov

1. Nájdite všetky dvojice kladných celých čísel a, b, pre ktoré platí

$$\sqrt{a+2\sqrt{b}}=\sqrt{a-2\sqrt{b}}+\sqrt{b}.$$

2. Daný je trojuholník ABC s ťažiskom T. Označme M stred strany BC. Na polpriamke opačnej k BA leží bod D taký, že $|AB|=|BD|$. Podobne na polpriamke opačnej k CA leží bod E taký, že $|AC|=|CE|$. Úsečky TD, TE pretínajú stranu BC postupne v bodoch P, Q. Dokážte, že body P, Q, M rozdeľujú úsečku BC na štyri rovnako dlhé časti.

3. Pre ktoré prirodzené čísla n sa dá tabuľka $n\times n$ vyplniť číslami 1, 2 a -3 tak, aby súčet čísel v každom riadku aj v každom stĺpci bol 0?

4. Daná je kružnica k a jej priemer AB. Vnútri úsečky AB zvolíme ľubovoľný bod C a potom na kružnici k vyberieme bod D tak, aby vznikol ostrouhlý trojuholník BCD, ktorého opísaná kružnica má stred v bode, ktorý označíme O. Nech ešte E označuje priesečník kružnice k s priamkou BO (rôzny od bodu B). Dokážte, že trojuholníky BCD a ECA sú podobné.

5. V skupine osôb má každý práve d známych a každí dvaja, ktorí sa nepoznajú, majú práve jedného spoločného priateľa. Dokážte, že počet osôb v tejto skupine nie je väčší ako d^2+1.

Čas: 3 hodiny 30 minút

8^{TH} Czech-Polish-Slovak Junior Mathematical Match

Zuberec (Slovakia), 21^{ST} May 2019 — Team Competition

1. Rational numbers a, b are such that $a+b$ and a^2+b^2 are integers. Prove that a, b are integers.

Poznámka. Riešenie tejto úlohy musí byť napísané po poľsky.

2. The chess piece *sick rook* can move along rows and columns as a regular rook, but at most by 2 fields. We can place sick rooks on a square board in such a way that no two of them attack each other and no field is attacked by more than one sick rook.

a) Prove that on 30×30 board, we cannot place more than 100 sick rooks.

b) Find the maximum number of sick rooks which can be placed on 8×8 board.

c) Prove that on 32×32 board, we cannot place more than 120 sick rooks.

Uwaga. Rozwiązanie tego zadania powinno być napisane po słowacku.

3. Let $ABCD$ be a convex quadrilateral with perpendicular diagonals, such that $\sphericalangle BAC=\sphericalangle ADB$, $\sphericalangle CBD=\sphericalangle DCA$, $AB=15$, $CD=8$. Show that $ABCD$ is cyclic and find the distance between its circumcentre and the point of intersection of its diagonals.

Poznámka. Řešení této úlohy odevzdejte ve slovenštině.

4. Determine all possible values of the expression $xy+yz+zx$ with real numbers x, y, z satisfying the conditions

$$x^2-yz=y^2-zx=z^2-xy=2.$$

Poznámka. Riešenie tejto úlohy musí byť napísané po česky.

5. Let $A_1A_2\ldots A_{360}$ be a regular 360-gon with centre S. For each of the triangles $A_1A_{50}A_{68}$ and $A_1A_{50}A_{69}$ determine, whether its images under some 120 rotations with centre S can have (as triangles) all the 360 points A_1, A_2, $\ldots$, A_{360} as vertices.

Uwaga. Rozwiązanie tego zadania powinno być napisane po czesku.

6. Given is a cyclic quadrilateral $ABCD$. Points K, L, M, N lying on sides AB, BC, CD, DA, respectively, satisfy

$$\sphericalangle ADK=\sphericalangle BCK,\quad \sphericalangle BAL=\sphericalangle CDL,\quad \sphericalangle CBM=\sphericalangle DAM,\quad \sphericalangle DCN=\sphericalangle ABN.$$

Prove that lines KM and LN are perpendicular.

Poznámka. Řešení této úlohy odevzdejte v polštině.

Time: 5 hours

8^{TH} CZECH-POLISH-SLOVAK JUNIOR MATHEMATICAL MATCH

ZUBEREC (SLOVAKIA), 21^{ST} MAY 2019 — TEAM COMPETITION

1. Jsou dána racionální čísla a, b taková, že čísla $a+b$ a a^2+b^2 jsou celá. Dokažte, že čísla a, b jsou celá.

POZNÁMKA. Riešenie tejto úlohy musí byť napísané po poľsky.

2. Šachová figurka *nemocná věž* se pohybuje po řádcích a sloupcích jako obyčejná věž, ale nejvýše o 2 políčka. Nemocné věže budeme na čtvercovou šachovnici rozmísťovat tak, aby se žádné dvě z nich navzájem neohrožovaly a aby neexistovalo žádné pole ohrožené více než jednou věží.

a) Dokažte, že na šachovnici 30×30 takto nelze rozmístit více než 100 nemocných věží.
b) Určete největší možný počet nemocných věží, které lze takto rozmístit na šachovnici 8×8.
c) Dokažte, že na šachovnici 32×32 takto nelze rozmístit více než 120 nemocných věží.

UWAGA. Rozwiązanie tego zadania powinno być napisane po słowacku.

3. Niech $ABCD$ czworokątem wypukłym o prostopadłych przekątnych, w którym $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ADB$, $\sphericalangle CBD = \sphericalangle DCA$, $AB=15$, $CD=8$. Wykaż, że na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg oraz wyznacz odległość między środkiem tego okręgu a punktem przecięcia przekątnych czworokąta.

POZNÁMKA. Řešení této úlohy odevzdejte ve slovenštině.

4. Wyznacz wszystkie możliwe wartości wyrażenia $xy+yz+zx$, gdzie liczby rzeczywiste x, y, z spełniają warunki

$$x^2-yz=y^2-zx=z^2-xy=2.$$

POZNÁMKA. Riešenie tejto úlohy musí byť napísané po česky.

5. Daný je pravidelný 360-uholník $A_1A_2\dots A_{360}$ so stredom S. Pre každý z trojuholníkov $A_1A_{50}A_{68}$ a $A_1A_{50}A_{69}$ rozhodnite, či jeho obrazy v 120 vhodných otočeniach so stredom S môžu mať (ako trojuholníky) za vrcholy všetkých 360 bodov A_1, A_2, $\dots$, A_{360}.

UWAGA. Rozwiązanie tego zadania powinno być napisane po czesku.

6. Daný je tetivový štvoruholník $ABCD$. Na stranách AB, BC, CD, DA ležia postupne body K, L, M, N, pričom

$$|\measuredangle ADK| = |\measuredangle BCK|, \qquad |\measuredangle BAL| = |\measuredangle CDL|,$$
$$|\measuredangle CBM| = |\measuredangle DAM|, \qquad |\measuredangle DCN| = |\measuredangle ABN|.$$

Dokážte, že priamky KM a LN sú na seba kolmé.

POZNÁMKA. Řešení této úlohy odevzdejte v polštině.

TIME: 5 HOURS