I. kolo kategorie Z5

Z5–I–1

Pan Krbec s kocourem Kokešem prodávali na hradě Kulíkově vstupenky. V sobotu prodali 210 dětských vstupenek po 25 groších a také nějaké vstupenky pro dospělé po 50 groších. Celkem za ten den utržili 5 950 grošů.

Kolik prodali vstupenek pro dospělé? (*M. Krejčová*)

Z5–I–2

Děti na táboře házely hrací kostkou a podle výsledků plnily následující úkoly:

1	jděte 1 km na západ
2	jděte 1 km na východ
3	jděte 1 km na sever
4	jděte 1 km na jih
5	stůjte na místě
6	jděte 3 km na sever

Po pěti hodech bylo Markovo družstvo 1 km východně od startu.

1. Jakou trasu mohlo Markovo družstvo projít? Naznačte alespoň čtyři možnosti.
2. Jaký mohl být celkový součet všech čísel, která tomuto družstvu padla? Určete všechny možnosti.

(*E. Semerádová*)

Z5–I–3

Pan režisér Alík potřeboval do televizní pohádky čtyři psy. Dostal nabídku z Řecka, Belgie, Irska a z Dolní Lhoty. Vybral ovčáka, dalmatina, vlkodava a jezevčíka, každého z jiné země, s různým jménem a různým věkem.

- Nejstarší ze psů byl jezevčík, bylo mu 5 let.
- Bucki byl z nich druhý nejmladší.
- Vlkodav pocházel z Irska.
- Pes z Dolní Lhoty se jmenoval Punťa.
- Oddi oslavil včera své čtvrté narozeniny.
- Ovčák pocházel z Belgie.
- Rubby nebyl dalmatin.
- Vlkodav měl tři roky.
- Nejmladší z vybraných psů byl Rubby, byly mu dva roky.

Zjistěte, jak se každý vybraný pes jmenoval, odkud pocházel, jaké byl rasy a kolik mu bylo let. (*L. Hozová*)

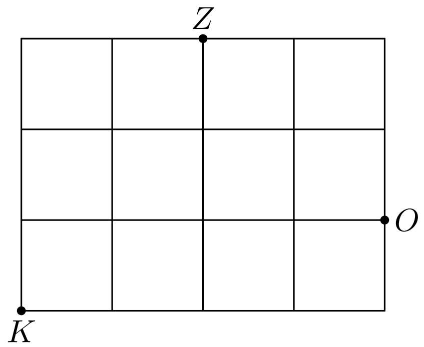
Z5–I–4

Maminka uvařila domácí rybízovou šťávu a nalévala ji do lahví. Lahve měla dvojí: malé s objemem 500 ml a velké s objemem 750 ml. Nakonec jí zbylo 12 malých lahví prázdných, ostatní lahve byly zcela naplněné. Poté maminka zjistila, že mohla šťávu nalévat tak, aby jí zbyly prázdné pouze velké lahve a všechny ostatní byly zcela naplněné.

Kolik prázdných lahví by jí v takovém případě zbylo? (*M. Petrová*)

Z5–I–5

Ve čtvercové síti se čtverečky o rozměrech $1\,\mathrm{cm} \times 1\,\mathrm{cm}$ jsou vyznačeny tři uzlové body K, O a Z. Určete uzlový bod A tak, aby obsah čtyřúhelníku $KOZA$ byl $4\,\mathrm{cm}^2$. (*E. Semerádová*)



Z5–I–6

Myslím si pětimístné číslo tvořené sudými číslicemi. Pokud prohodím číslici na třetím místě s jakoukoliv jinou, číslo se zmenší. Dále prozradím, že první číslice je dvojnásobkem poslední a druhá číslice je dvojnásobkem předposlední.

Jaké číslo si myslím? (*M. Mach*)

I. kolo kategorie Z6

Z6–I–1

Králíci Pečínka, Fašírka, Řízek a Guláš soutěžili ve skoku do dálky. Pečínka skočila o 15 cm dál než Fašírka, která skočila o 2 dm méně než Guláš. Řízek skočil 2 730 mm, tedy o 1 m a 1 dm dál než Pečínka.

Určete pořadí a délky skoků všech králíků. (*S. Bednářová*)

Z6–I–2

Vzal jsem klasickou černobílou šachovnici, která byla tvořena 8×8 čtvercovými políčky se stranami délky 3 cm. Políčka jsem v daném rámci přeskládal tak, že vznikl jeden černý obdélník, jeden černý čtverec a jeden souvislý bílý útvar. Jednotlivá políčka se i po přeskládání dotýkala celými stranami. Černé útvary se nedotýkaly (ani rohem) a každý z nich měl alespoň jednu stranu společnou s okrajem šachovnice.

Určete největší možný obvod bílého útvaru a nakreslete, jak by v takovém případě mohl vypadat. (*M. Mach*)

Z6–I–3

Maminka dala do mísy 56 jahod a 39 malin a zanesla je Emě, která si četla. Ema si čtení zpříjemnila mlsáním, a to tak, že si postupně brala po dvou náhodných kusech ovoce:

- Když vytáhla dvě maliny, vyměnila je u maminky za jednu jahodu a tu vrátila do mísy.
- Když vytáhla dvě jahody, jednu snědla a druhou vrátila do mísy.
- Když vytáhla jednu jahodu a jednu malinu, snědla jahodu a malinu vrátila do mísy.

Takto nějakou chvíli mlsala, až v míse zůstal jediný kus ovoce. Rozhodněte (a vysvětlete), jestli to byla jahoda, nebo malina. (*L. Hozová*)

Z6–I–4

Ctirad naprogramoval dva spolupracující rýsovací roboty Mikyho a Nikyho. Miky umí sestrojovat čtverce, pravidelné pětiúhelníky a pravidelné šestiúhelníky. Během jednoho dne však rýsuje pouze navzájem shodné mnohoúhelníky. Niky do všech Mikyho mnohoúhelníků doplňuje všechny úhlopříčky.

1. V pondělí sestrojil Miky stejný počet úseček jako Niky. Které mnohoúhelníky rýsovali?
2. V úterý sestrojil Miky 18 úseček. Kolik jich sestrojil Niky?
3. Ve středu sestrojili Miky a Niky dohromady 70 úseček. Kolik mnohoúhelníků jim dal Ctirad rýsovat?

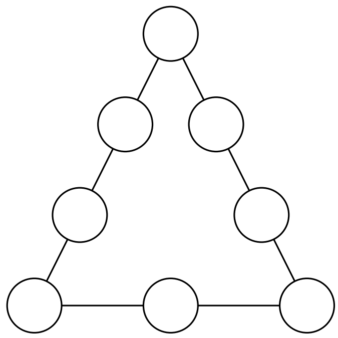
(*M. Petrová*)

Z6–I–5

Petra vepisovala do kroužků čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 tak, že každé bylo použito právě jednou a že součet čísel na každé straně trojúhelníku byl stejný.

Jaký největší součet mohla takto dostat? Uveďte příklad možného vyplnění.

(*A. Bohiniková*)



Z6–I–6

Anička a Maruška mají každá svoje oblíbené přirozené číslo. Vynásobíme-li Aniččino číslo samo se sebou, vyjde nám stokrát větší číslo, než když vynásobíme Maruščino číslo samo se sebou. Sečteme-li Aniččino a Maruščino oblíbené číslo, získáme číslo o 18 větší, než je polovina Aniččina čísla.

Určete Aniččino a Maruščino oblíbené číslo. (*E. Semerádová*)

I. kolo kategorie Z7

Z7–I–1

Určete, která číslice je na 1000. místě za desetinnou čárkou v desetinném rozvoji čísla $\frac{9}{28}$. (*M. Krejčová*)

Z7–I–2

Kuba se domluvil s bačou, že se mu bude starat o ovce. Bača Kubovi slíbil, že po roce služby dostane dvacet zlatých a k tomu jednu ovci. Jenže Kuba dal výpověď, právě když uplynul sedmý měsíc služby. I tak ho Bača spravedlivě odměnil a zaplatil mu pět zlatých a jednu ovci.

Na kolik zlatých si bača cenil jednu ovci? (*L. Hozová*)

Z7–I–3

Pro skupinu dětí platí, že v každé trojici dětí ze skupiny je chlapec jménem Adam a v každé čtveřici je dívka jménem Beata.

Kolik nejvýše dětí může být v takové skupině a jaká jsou v tom případě jejich jména? (*J. Zhouf*)

Z7–I–4

Mezi přístavy Mumraj a Zmatek pendlují po stejné trase dvě lodě. V přístavech tráví zanedbatelný čas, hned se otáčí a pokračují v plavbě. Ráno ve stejný okamžik vyplouvá modrá loď z přístavu Mumraj a zelená loď z přístavu Zmatek. Poprvé se lodě míjejí 20 km od přístavu Mumraj a po nějakém čase se potkají přímo v tomto přístavu. To už modrá loď stihla uplout trasu mezi přístavy čtyřikrát, zatímco zelená loď pouze třikrát.

Jak dlouhá je trasa mezi přístavy Mumraj a Zmatek? (*F. Steinhauser*)

Z7–I–5

Odčítací pyramida je pyramida tvořená nezápornými celými čísly, z nichž každé je rozdílem dvou nejbližších čísel z předchozího patra (čteno odspodu nahoru). Zde je příklad odčítací pyramidy:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 2 & & 1 & & \\ & 2 & & 4 & & 5 & \\ 5 & & 7 & & 3 & & 8 \end{array}$$

Význačné číslo je největší číslo odčítací pyramidy. Výtečná pyramida je odčítací pyramida, která má ve vrcholu 0 a alespoň jedno patro tvořené navzájem různými čísly.

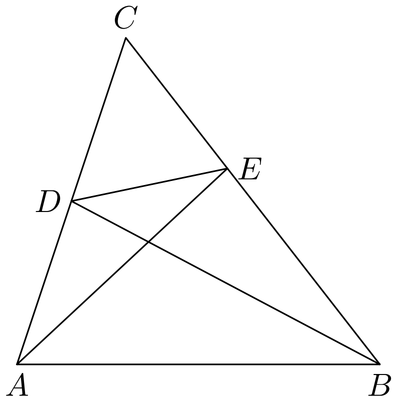
1. Kolik nejméně pater musí mít výtečná pyramida?
2. Které nejmenší význačné číslo může být obsaženo ve výtečné pyramidě s nejmenším počtem pater?

(*K. Jasenčáková*)

Z7–I–6

V trojúhelníku ABC leží na straně AC bod D a na straně BC bod E. Velikosti úhlů ABD, BAE, CAE a CBD jsou po řadě $30°$, $60°$, $20°$a $30°$.

Určete velikost úhlu AED.



Poznámka: obrázek je pouze ilustrativní. (*A. Bohiniková*)

I. kolo kategorie Z8

Z8–I–1

Myslím si pětimístné číslo, které není dělitelné třemi ani čtyřmi. Pokud každou číslici zvětším o jedna, získám pětimístné číslo, které je dělitelné třemi. Pokud každou číslici o jedna zmenším, získám pětimístné číslo dělitelné čtyřmi. Pokud prohodím libovolné dvě číslice, číslo se zmenší.

Jaké číslo si můžu myslet? Najděte všechny možnosti. (*M. Mach*)

Z8–I–2

Na zahradě stály tři bedny s jablky. Celkem bylo jablek více než 150, avšak méně než 190. Maruška přemístila z první bedny do dvou dalších beden jablka tak, že se jejich počet v každé z těchto dvou beden oproti předchozímu stavu zdvojnásobil. Obdobným způsobem Marta přemístila jablka z druhé bedny do první a třetí. Nakonec Šárka podle stejných pravidel přemístila jablka z třetí bedny do první a druhé. Když přišel na zahradu Vojta, podivil se, že v každé bedně byl stejný počet jablek.

Kolik jablek bylo v jednotlivých bednách původně? (*L. Hozová*)

Z8–I–3

V trojúhelníku ABC je bod S středem vepsané kružnice. Obsah čtyřúhelníku $ABCS$ je roven čtyřem pětinám obsahu trojúhelníku ABC. Délky stran trojúhelníku ABC vyjádřené v centimetrech jsou všechny celočíselné a obvod trojúhelníku ABC je 15 cm.

Určete délky stran trojúhelníku ABC. Najděte všechny možnosti.

(*E. Semerádová*)

Z8–I–4

Jitka byla na brigádě s neměnnou denní mzdou. Za tři dny si vydělala tolik peněz, že si koupila stolní hru a ještě jí 490 Kč zbylo. Kdyby strávila na brigádě pět dní, mohla by si koupit dvě takové stolní hry a ještě by jí zbylo 540 Kč.

Kolik korun stála stolní hra? (*K. Pazourek*)

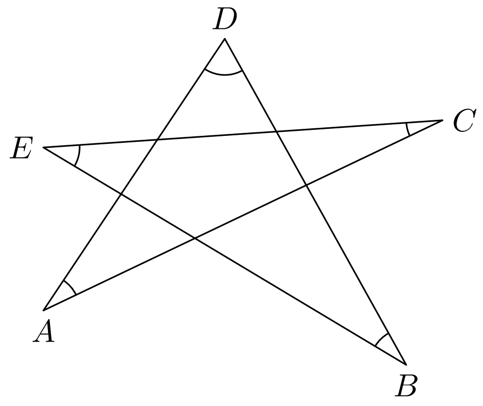
Z8–I–5

Pan Stříbrný uspořádal výstavu. Vystavoval 120 prstenů, které ležely na stolech podél stěn sálu a tvořily tak jednu velkou kružnici. Prohlídka začínala u vchodových dveří v označeném směru. Odtud každý třetí prsten v řadě byl zlatý, každý čtvrtý prsten byl starožitný a každý desátý prsten měl diamant. Prsten, který neměl žádnou z těchto tří vlastností, byl padělek.

Kolik bylo na výstavě zlatých prstenů, které byly starožitné a zároveň měly diamant? Kolik vystavil pan Stříbrný padělků? (*L. Hozová*)

Z8–I–6

Body A, B, C, D a E jsou vrcholy nepravidelné pěticípé hvězdy, viz obrázek. Určete součet vyznačených úhlů.



Poznámka: obrázek je pouze ilustrativní. (*L. Hozová*)

I. kolo kategorie Z9

Z9–I–1

Slavěna si napsala barevnými fixy čtyři různá přirozená čísla: červené, modré, zelené a žluté. Když červené číslo vydělí modrým, dostane jako neúplný podíl zelené číslo a žluté představuje zbytek po tomto dělení. Když vydělí modré číslo zeleným, vyjde jí dělení beze zbytku a podílem je číslo žluté. Slavěna prozradila, že dvě z jejích čtyř čísel jsou 97 a 101.

Určete ostatní Slavěnina čísla a přiřaďte jednotlivým číslům barvy. Najděte všechny možnosti. (*M. Petrová*)

Z9–I–2

Najděte všechny dvojice nezáporných celých čísel x a jednomístných přirozených čísel y, pro která platí

$$\frac{x}{y} + 1 = x,\overline{y}.$$

Zápis na pravé straně rovnosti značí periodické číslo. (*K. Pazourek*)

Z9–I–3

V rovnostranném trojúhelníku ABC je bod T jeho těžištěm, bod R je obrazem bodu T v osové souměrnosti podle přímky AB a bod N je obrazem bodu T v osové souměrnosti podle přímky BC.

Určete poměr obsahů trojúhelníků ABC a TRN. (*E. Semerádová*)

Z9–I–4

Na zdi byla napsána dvě stejná pětimístná čísla. Pat před jedno z těchto čísel připsal jedničku, Mat připsal jedničku za to druhé. Tím dostali dvě šestimístná čísla, z nichž jedno bylo třikrát větší než druhé.

Která pětimístná čísla byla původně napsána na zdi? (*L. Hozová*)

Z9–I–5

Na hřišti jsou nakresleny tři stejně velké kruhy, z nichž žádné dva nejsou totožné. Rozmístěte 16 dívek tak, aby v každém kruhu stálo 9 dívek.

Najděte alespoň osm podstatně různých rozmístění, tj. takových rozmístění, při kterých se nerozlišují dívky ani kruhy. (Záměna jednotlivých dívek, příp. celých kruhů s dívkami dává rozmístění, které není podstatně různé od původního.) (*L. Hozová*)

Z9–I–6

Josef a Marie objevili na dovolené pravidelný jehlan, jehož podstavou byl čtverec o straně 230 m a jehož výška byla rovna poloměru kruhu se stejným obvodem jako podstavný čtverec. Marie označila vrcholy čtverce $ABCD$. Josef vyznačil na přímce spojující bod B s vrcholem jehlanu takový bod E, že délka lomené čáry AEC byla nejkratší možná.

Určete délku lomené čáry AEC zaokrouhlenou na celé centimetry.

(*M. Krejčová, F. Steinhauser*)