Česko-Polsko-Slovenské Střetnutí

26. – 28. srpna 2020

(První den – 26. srpna 2020)

1. Buď $ABCD$ rovnoběžník, jehož úhlopříčky se protínají v bodě P. Označme M střed strany AB. Dále buď Q bod takový, že QA je tečna kružnice opsané trojúhelníku MAD a QB je tečna kružnice opsané trojúhelníku MBC. Dokažte, že body Q, M a P leží na jedné přímce.

2. Buď n přirozené číslo. O reálném číslu x řekneme, že je *n-dobré*, pokud existuje n přirozených čísel $a_1, \ldots, a_n$ splňujících

$$x = \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}.$$

Najděte všechna přirozená čísla k, pro která platí následující tvrzení:

> Pokud jsou a, b reálná čísla taková, že uzavřený interval $[a, b]$ obsahuje nekonečně mnoho 2020-dobrých čísel, pak interval $[a, b]$ obsahuje alespoň jedno k-dobré číslo.

3. Na tabuli jsou napsána přirozená čísla $1, 2, \ldots, 2020$. Venus a Serena hrají následující hru. Nejprve Venus spojí úsečkou dvě čísla taková, že jedno z nich je dělitelem druhého. Poté Serena spojí úsečkou dvě čísla, která ještě nebyla spojena, a platí, že jedno z nich je dělitelem druhého. Následně je na tahu opět Venus a obdobně pokračují ve střídání tahů, dokud nevznikne trojúhelník s jedních vrcholem v čísle 2020, tj. 2020 je spojeno se dvěma čísly, která jsou zároveň spojena úsečkou. Vítězí dívka, která nakreslila poslední úsečku (vytvořila daný trojúhelník). Která z dívek má vyhrávající strategii?

Čas: 4 hodiny a 30 minut.
Za každou úlohu lze získat 7 bodů.

Language: Czech

Česko-Polsko-Slovenské Střetnutí

26. – 28. srpna 2020

(Druhý den – 27. srpna 2020)

4. Nechť α je dané reálné číslo. Nalezněte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující

$$(x+y)(f(x)-f(y)) = \alpha(x-y)f(x+y)$$

pro všechna x, $y \in \mathbb{R}$.

5. Pro přirozené číslo n označme $d(n)$ počet uspořádaných dvojic přirozených čísel (x, y) splňujících

$$(x+1)^2 - xy(2x - xy + 2y) + (y+1)^2 = n.$$

Najděte nejmenší přirozené číslo n takové, že $d(n) = 61$.

6. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Nechť P je takový bod, že PB a PC jsou tečny ke kružnici opsané trojúhelníku ABC. Dále zvolme body X a Y postupně na přímkách AB a AC splňující, že $|\angle XPY| = 2|\angle BAC|$ a bod P leží uvnitř trojúhelníka AXY. Označme Z obraz bodu A při osové souměrnosti podle přímky XY. Dokažte, že pro všechny možné volby X a Y prochází kružnice opsaná trojúhelníku XYZ pevným bodem.

Čas: 4 hodiny a 30 minut.
Za každou úlohu lze získat 7 bodů.

Language: Czech