Česko-Polsko-Slovensko-Rakouské střetnutí, 1. den

1. Určete všechny čtveřice (a, b, c, d) kladných celých čísel splňující $\mathrm{NSD}(a, b, c, d) = 1$ a

$$a \mid b + c, \quad b \mid c + d, \quad c \mid d + a, \quad d \mid a + b.$$

2. Kružnice ω vepsaná ostrúhlému trojúhelníku ABC se dotýká jeho strany BC v bodě D. Označme I_a střed kružnice připsané trojúleníku ABC proti vrcholu A a M střed úsečky DI_a. Dokažte, že kružnice opsaná trojúhelníku BMC se dotýká kružnice ω.

3. Pro libovolné dva konvexní mnohúhelníky P_1 a P_2 s navzájem různými vrcholy označme $f(P_1, P_2)$ celkový počet těch jejich vrcholů, které leží na straně druhého mnohoúhelníku. Pro každé kladné celé číslo $n \geq 4$ určete

$$\max\{f(P_1, P_2) \mid P_1 \text{ a } P_2 \text{ jsou konvexní } n\text{-úhelníky}\}.$$

(Řekneme, že mnohoúhelník je *konvexní*, pokud velikosti všech jeho vnitřních úhlů jsou menší než 180°.)

Česko-Polsko-Slovensko-Rakouské střetnutí, 2. den

4. Určete počet uspořádaných 2021tic kladných celých čísel, které obsahují číslo 3 a pro které navíc platí, že každá dvě po sobě následující čísla se liší nejvýše o 1.

5. Posloupnost $a_1, a_2, a_3, \ldots$ splňuje $a_1 = 1$ a pro $n \geq 2$ platí

$$a_n = \begin{cases} a_{n-1} + 3 & \text{pokud } n - 1 \in \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}; \\ a_{n-1} + 2 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Dokažte, že pro každé kladné celé číslo n platí

$$a_n < n \cdot (1 + \sqrt{2}).$$

6. Na obvodu ostroúhlého trojúhelníku ABC leží body A, A_b, B_a, B, B_c, C_b, C, C_a a A_c v tomto pořadí. Označme $A_1 \neq A$ druhý průsečík kružnic opsaných trojúhelníkům AA_bC_a a AA_cB_a. Podobně označme $B_1 \neq B$ druhý průsečík kružnic opsaných trojúhelníkům BB_cA_b a BB_aC_b a $C_1 \neq C$ druhý průsečík kružnic opsaných trojúhelníkům CC_aB_c a CC_bA_c. Předpokládejme, že body A_1, B_1 a C_1 jsou navzájem různé, leží uvnitř trojúhelníku ABC a neleží na jedné přímce. Dokažte, že přímky AA_1, BB_1, CC_1 a kružnice opsaná trojúhelníku $A_1B_1C_1$ procházejí všechny jedním bodem.