15. Středoevropská matematická olympiáda

Letošní Středoevropská matematická olympiáda proběhla ve dnech 23. - 28. srpna. Příjemným překvapením pak bylo, že se soutěž podařilo uspořádat prezenčně v chorvatském Záhřebu. Soutěže se letos zúčastnilo 66 studentů z 11 zemí: Česka, Chorvatska, Litvy, Maďarska, Německa, Polska, Rakouska, Slovenska, Slovinska, Švýcarska a pro letošek přizvané Bosny a Hercegoviny. Kromě právě Bosny a Hercegoviny, Německa a Litvy soutěžily zúčastněné země v místě konání soutěže.

I prezenční účast českého družstva byla v ohrožení. Naštěstí veškeré náklady na účast českého týmu pokryla firma G-Research; shodou okolností současný zaměstnavatel jednoho z vedoucích české výpravy. Děkujeme.

Český tým tvořili *Veronika Borková* z gymnázia V. Makovského v Novém Městě na Moravě, *Martin Fof* z Mendelova gymnázia v Opavě, *Jakub Horák* z gymnázia Matyáše Lercha v Brně, *Hynek Jakeš* ze Slovanského gymnázia v Olomouci, *Zdeněk Pezlar* z gymnázia na tř. Kpt. Jaroše v Brně a *Ondřej Trinkewitz* z gymnázia ve Frenštátě pod Radhoštěm. Vedoucími této delegace pak byli *Michal Rolínek* a *Pavel Šalom*.

V průběhu soutěže řešili soutěžící po dobu 5 hodin čtyři úlohy, po jedné z algebry, kombinatoriky, geometrie a teorie čísel, za každou z nichž mohli získat až 8 bodů. Ze všech soutěžících pak medaile obdržela zhruba polovina, a to tak, aby poměr zlatých, stříbrných a bronzových medailí byl přibližně 1 : 2 : 3. Po jednoleté přestávce se letos vrátila i týmová soutěž, v níž každé družstvo společně řeší během pěti hodin osmici náročných úloh.

Přehled výsledků českého družstva uvádíme v následující tabulce:

		Body za úlohu				**Body**	**Cena**
Umístění		1	2	3	4		
5.–6.	Martin Fof	8	8	2	2	20	Z
15.–17.	Zdeněk Pezlar	5	0	8	2	15	S
32.–35.	Veronika Borková	0	0	8	1	9	B
40.–41.	Hynek Jakeš	4	0	0	3	7	
46.–47.	Jakub Horák	0	4	0	1	5	
52.–55.	Ondřej Trinkweitz	0	1	0	2	3	

Výprava tak celkem získala po jedné medaili od každého cenného kovu. Obzvláště potěšující je pak zlatá medaile Martina Fofa, který se tak stal teprve třetím českým zlatým medailistou v patnáctileté historii soutěže.

Absolutním vítězem soutěže se stal *Kosma Kasprzak* z Polska, který jako jediný získal plný počet 32 bodů.

Český tým se blýskl také v týmové soutěži, kde dosáhl sdíleného čtvrtého místa, přičemž jej jediný bod dělil dokonce od stříbrné medaile. V případě rovnosti bodu totiž rozhoduje vyšší počet „osmiček“, následně pak „sedmiček“ a tak dále.

		Body za úlohu								**Body**
Umístění		1	2	3	4	5	6	7	8	
1.	Polsko	8	8	8	8	8	8	8	8	64
2.	Maďarsko	8	2	8	7	8	8	8	0	49
3.	Chorvatsko	8	3	6	8	8	0	8	8	49
4.–5.	Česko	8	0	8	8	8	0	8	8	48
4.–5.	Bosna a Herc.	8	0	8	8	8	8	8	0	48
6.	Německo	8	7	8	8	8	0	8	0	47
7.	Švýcarsko	8	2	0	0	8	8	8	0	34
8.	Rakousko	8	0	1	0	8	2	8	0	27
9.–10.	Litva	7	0	8	2	0	0	8	0	25
9.–10.	Slovensko	8	0	5	2	8	0	2	0	25
11.	Slovinsko	7	0	1	1	0	0	7	0	16

Třešničkou na dortu vydařené soutěže je pak fakt, že všechny čtyři úlohy zadané do individuální soutěže měly české nebo slovenské autory. Spolu s týmovou soutěží pak bylo zadáno dohromady 7 československých úloh tedy více než polovina z celkového počtu.

Podrobné výsledky lze nalézt na stránkách soutěže:

`https://memo2021.math.hr/`

Texty soutěžních úloh
(v závorce je uvedena země, která úlohu navrhla)

1. Najděte všechna reálná čísla A taková, že každá posloupnost nenulových reálných čísel $x_1, x_2, \dots$ splňující

$$x_{n+1} = A - \frac{1}{x_n}$$

pro každé celé číslo $n \geq 1$ má pouze konečně mnoho záporných členů.

(*Česká republika, David Hruška*)

2. Nechť m a n jsou kladná celá čísla. Několik čtvercových políček tabulky $m \times n$ je obarveno červeně. Posloupnost $a_1, a_2, \dots, a_{2r}$ obsahující $2r \geq 4$ různých červených políček nazveme *cyklus šachového střelce*, pokud pro každé $k \in \{1, \dots, 2r\}$ leží a_k a a_{k+1} na diagonále dané tabulky, zatímco a_k a a_{k+2} na diagonále neleží (přitom $a_{2r+1} = a_1$ a $a_{2r+2} = a_2$). V závislosti na m a n najděte největší možný počet červených políček tabulky $m \times n$, která neobsahuje žádný cyklus šachového střelce.

Poznámka. Dvě čtvercová políčka leží na diagonále, pokud spojnice jejich středů svírá úhel $45°$ s hranami tabulky.

(*Slovensko*)

3. Uvnitř strany BC ostroúhlého trojúhelníka ABC je dán bod D. V polorovině určené přímkou BC obsahující bod A zvolíme body E a F tak, že přímka DE je kolmá na BE a zároveň se dotýká kružnice opsané trojúhelníku ACD, a obdobně je také přímka DF kolmá na CF a zároveň se dotýká kružnice opsané trojúhelníku ABD. Dokažte, že body A, D, E, F leží na jedné kružnici.

(*Slovensko*)

4. Nechť $n \geqslant 3$ je celé číslo. Veverka Verča sedí ve vrcholu pravidelného n-úhelníku. Chystá se na procházku o $n-1$ skocích takových, že při i-tém z nich skočí o i hran po směru hodinových ručiček pro $i \in \{1, ..., n-1\}$. Dokažte, že pokud Verča po $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ skocích navštíví $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ různých vrcholů, tak potom po $n-1$ skocích navštíví všechny vrcholy.

Poznámka. Pro reálné číslo x značíme symbolem $\lceil x \rceil$ nejmenší celé číslo větší nebo rovné x.

(*Česká republika, Michal Janík*)

Texty úloh týmové soutěže

(v závorce je uvedena země, která úlohu navrhla)

1. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že nerovnost

$$f(x^2) - f(y^2) \leqslant (f(x) + y)(x - f(y))$$

platí pro všechna reálná čísla x a y.

(*Chorvatsko*)

2. Pro kladné celé číslo n řekneme, že polynom P s reálnými koeficienty je *n-násobně pěkný*, pokud rovnice $P(\lfloor x \rfloor) = \lfloor P(x) \rfloor$ má právě n reálných řešení. Dokažte, že pro každé celé kladné číslo n

1. existuje n-násobně pěkný polynom;
2. libovolný n-násobně pěkný polynom má stupeň alespoň $\frac{2n+1}{3}$.

Poznámka. Pro reálné číslo x značíme symbolem $\lfloor x \rfloor$ největší celé číslo menší nebo rovné x.

(*Polsko*)

3. Jsou dána kladná celá čísla n, b a c. Skupina n pirátů si chce spravedlivě rozdělit poklad. Ten se skládá z $c \cdot n$ identických mincí rozmístěných do $b \cdot n$ pytlů, z nichž alespoň $n - 1$ je na začátku prázdných. Kapitán Zdeněk si prohlédne obsah každého pytle a dále postupuje v tazích. V jednom tahu může přemístit libovolný počet mincí z jednoho pytle do jednoho z prázdných pytlů. Dokažte, že ať už jsou mince na začátku rozmístěny jakkoliv, Zdeněk může udělat nejvýše $n - 1$ tahů, po nichž lze rozdělit pytle mezi piráty tak, že každý pirát dostane b pytlů a c mincí.

(*Česká republika, Josef Tkadlec*)

4. Ať n je kladné celé číslo. Dokažte, že v pravidelném $6n$-úhelníku lze nakreslit $3n$ úhlopříček s navzájem různými koncovými body a těchto $3n$ úhlopříček dále rozdělit do n trojic tak, že

(a) úhlopříčky v každé trojici se protínají v jednom bodě ležícím uvnitř daného $6n$-úhelníku, a

(b) průsečíky určené všemi trojicemi úhlopříček tvoří n navzájem různých bodů.

(*Maďarsko*)

5. Označme AD průměr kružnice opsané ostroúhlému trojúhelníku ABC. Rovnoběžky se stranami AB a AC procházející bodem D protínají přímky

AC a AB postupně v bodech E a F. Přímky EF a BC se protínají v bodě G. Dokažte, že přímky AD a DG jsou na sebe kolmé.

(*Polsko*)

6. V trojúhelníku ABC označme M střed strany BC. Bod X leží na polopřímce AB tak, že $2|\sphericalangle CXA| = |\sphericalangle CMA|$. Bod Y leží na polopřímce AC tak, že $2|\sphericalangle AYB| = |\sphericalangle AMB|$. Přímka BC protíná kružnici opsanou trojúhelníku AXY v bodech P a Q takových, že P, B, C a Q leží na přímce BC v tomto pořadí. Dokažte, že $|PB| = |QC|$.

(*Slovensko*)

7. Najděte všechny dvojice (n, p) kladných celých čísel takových, že p je prvočíslo a platí rovnost

$$1 + 2 + \cdots + n = 3 \cdot (1^2 + 2^2 + \cdots + p^2).$$

(*Polsko*)

8. Ukažte, že existuje nekonečně mnoho kladných celých čísel n takových, že zápis čísla n^2 ve čtyřkové soustavě obsahuje pouze číslice 1 a 2.

(*Slovensko*)