10th Czech–Polish–Slovak
Junior Mathematical Competition

Individual contest

(Monday, 16 May 2022)

1. Nechť $n \geqq 3$. Předpokládejme, že $a_1, a_2, \ldots, a_n$ je n navzájem různých reálných čísel. V závislosti na n určete nejmenší možný počet různých hodnot mezi n čísly

$$a_1 + a_2, \quad a_2 + a_3, \quad \ldots, \quad a_{n-1} + a_n, \quad a_n + a_1.$$

2. V oboru celých čísel řešte následující soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x^2 &= yz + 1, \\ y^2 &= zx + 1, \\ z^2 &= xy + 1. \end{aligned}$$

3. V konvexním pětiúhelníku $ABCDE$ platí

$$|\sphericalangle EAB| = 60^\circ, \quad |\sphericalangle ABC| = 100^\circ, \quad |\sphericalangle BCD| = 140^\circ.$$

Dokažte, že tento pětiúhelník je možno umístit do kruhu o poloměru $\frac{2}{3}|AD|$.

4. Nechť a, b jsou přirozená čísla s vlastností $\frac{a}{b} > \sqrt{2}$. Dokažte, že platí

$$\frac{a}{b} - \frac{1}{2ab} > \sqrt{2}.$$

5. Řekneme, že přirozené číslo $n \geqq 1$ je *dobré*, právě když splňuje následující podmínku:

> Jestliže je některé přirozené číslo dělitelné každým z devíti čísel $n+1, n+2, \ldots, n+9$, potom je také dělitelné číslem $n+10$.

Kolik přirozených čísel $n \geqq 1$ je dobrých?

Version: Czech
Time: 210 min