

10th Czech–Polish–Slovak
Junior Mathematical Competition

Team contest

(Tuesday, 17 May 2022)



1. Určete největší možnou hodnotu výrazu $ab + bc + 2ac$ pro nezáporná reálná čísla a, b, c , jejichž součet je 1.

Uwaga. Rozwiązanie tego zadania powinno być napisane po słowacku.

2. Na tabuli je napísané číslo 2022. V každom kroku nahradíme niektorú z číslic 2 číslom 2022. Napríklad

$$2022 \Rightarrow 20\underline{20}22 \Rightarrow 2020\underline{20}22 \Rightarrow \dots$$

Po koľkých krokoch môže byť na tabuli napísané číslo deliteľné 22? Určte všetky možnosti.

Uwaga. Rozwiązanie tego zadania powinno być napisane po czesku.

3. Punkty D, E, F ležá odpowiednio na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC w taki sposób, że $FB = BD, DC = CE$ oraz proste EF i BC są równoległe. Styczna do okręgu opisanego na trójkącie DEF w punkcie F przecina odcinek AD w punkcie P . Symetralna odcinka EF przecina odcinek AC w punkcie Q . Wykaż, że proste PQ i BC są równoległe.

Poznámka. Riešenie tejto úlohy musí byť napísané v češtine.

4. Najdźte wszystkie trojice (a, b, c) całkowitych liczb, które spełniają równości

$$a + b = c \quad \text{a} \quad a^2 + b^3 = c^2.$$

Poznámka. Riešenie tejto úlohy musí byť napísané v polštine.

5. Je daný pravidelný deväťuholník $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9$ s dĺžkou strany 1. Uhlopriečky A_3A_7 a A_4A_8 sa pretnú v bode P . Zistite dĺžku úsečky PA_1 .

Poznámka. Řešení této úlohy odevzdejte v polském jazyce.

6. Wyznacz wszystkie liczby całkowite $n \geq 4$ o następującej własności:

Każde pole tabeli $n \times n$ można pomalować na biało albo na czarno w taki sposób, aby każde pole tej tabeli miało ten sam kolor, co dokładnie dwa sąsiadujące z nim pola. (Pola są sąsiadujące, jeśli mają dokładnie jeden wspólny bok.)

Ile jest różnych kolorowań pól tabeli 6×6 spełniających powyższe warunki?

Poznámka. Řešení této úlohy odevzdejte ve slovenském jazyce.

Time: 300 min