# Česko-Polsko-Slovensko-Rakouské střetnutí 2022

## ISTA, Rakousko

(První den – 2. července, 2022)

**1.** Mějme kladné celé číslo $k \leq 2022$. Červenáček a Modroočko hrají hru na šachovnici o rozměrech $2022 \times 2022$. Na začátku jsou všechna políčka bílá. Červenáček začíná a hráči se pravidelně střídají v tazích. Červenáček ve svém tahu může vybrat jedno libovolné bílé políčko a obarvit ho červeně. Modroočko ve svém tahu může vybrat libovolný čtverec $k \times k$ bílých políček a obarvit všechna tato políčka modře. Oba hráči se mohou rozhodnout vynechat svůj tah. Ve chvíli kdy se tak rozhodnou dva tahy po sobě, hra končí a vyhrává ten, který obarvil více políček (může nastat remíza).

Pro každé $1 \leq k \leq 2022$ určete, který hráč má vyhrávající strategii (nebo určete, že ji nemá žádný).

**2.** Nalezněte všechny funkce $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ takové, že rovnost

$$f\left(f(x) + \frac{y+1}{f(y)}\right) = \frac{1}{f(y)} + x + 1$$

platí pro všechna reálná čísla $x, y > 0$.

**3.** Kružnice $\Omega_1$ a $\Omega_2$ s různými poloměry se protínají ve dvou bodech, jeden z nich označme $P$. Přímka $\ell$ procházející bodem $P$ protne oblouk $\Omega_1$, který leží vně $\Omega_2$, v bodě $X_1$ a oblouk $\Omega_2$, který leží vně $\Omega_1$, v bodě $X_2$. Buď $R$ bod na úsečce $X_1X_2$ takový, že $|X_1P| = |RX_2|$. Tečna ke kružnici $\Omega_1$ procházející bodem $X_1$ protíná tečnu ke kružnici $\Omega_2$ procházející bodem $X_2$ v bodě $T$. Dokažte, že přímka $RT$ je tečna k pevné kružnici nezávislé na volbě přímky $\ell$.

*Čas: 4 hodiny a 30 minut.*
*Za každou úlohu lze získat 7 bodů.*

*Language: Czech*

# Česko-Polsko-Slovensko-Rakouské střetnutí 2022

**ISTA, Rakousko**

(Druhý den – 3. července, 2022)

**4.** Pro kladné celé číslo $n$ označme $\tau(n)$ počet kladných dělitelů čísla $n$ a $\sigma(n)$ součet všech kladných dělitelů čísla $n$. Nalezněte všechna kladná celá čísla $n$ splňující

$$\sigma(n) = \tau(n) \cdot \left\lceil \sqrt{n} \right\rceil.$$

(Pomocí $\lceil x \rceil$ značíme nejmenší celé číslo, které není menší než $x$.)

**5.** Mějme trojúhelník $ABC$, ve kterém $|AB| < |AC|$, a označme $O$ střed kružnice jemu opsané. Osa úhlu $BAC$ protne stranu $BC$ v bodě $D$. Kolmice na stranu $BC$ vedená bodem $D$ protne úsečku $AO$ v bodě $X$. Dále buď $Y$ střed úsečky $AD$. Dokažte, že body $B$, $C$, $X$, $Y$ leží na jedné kružnici.

**6.** Uvažme abecedu obsahující 26 písmen $A, \ldots, Z$. Jako *slovo* označme konečnou posloupnost písmen z této abecedy. Řekneme, že slovo $s$ je *trikové*, pokud obsahuje každé z 26 písmen alespoň jednou a každá permutace písmen $A, \ldots, Z$ je obsažena jako podposloupnost v $s$ stejněkrát. Dokažte, že:

(a) Existuje trikové slovo.

(b) Každé trikové slovo obsahuje alespoň 2022 písmen.

(Permutace 26 písmen $\pi$ je *podposloupností* slova $s = s_1 s_2 s_3 \ldots$, pokud existuje 26 indexů $i_1 < i_2, < \cdots < i_{26}$ takových, že $\pi = s_{i_1} s_{i_2} \ldots s_{i_{26}}$.)

*Čas: 4 hodiny a 30 minut.*
*Za každou úlohu lze získat 7 bodů.*

*Language: Czech*