ZADÁNÍ ÚLOH 43. ROČNÍKU MO, KATEGORIE A

Domácí kolo

1. Přirozené číslo $m > 1$ nazveme $k-$násobným dělitelem přirozeného čísla n, pokud platí rovnost $n = m^k q$, kde q je celé číslo, které není násobkem čísla m. Určete, kolik sedminásobných dělitelů má číslo $100! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 100$.

2. Základnou trojbokého hranolu $ABCA'B'C'$ je pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník ABC s odvěsnami AB, AC dané délky a. Boční hrany AA', BB', CC' svírají s rovinami základen úhel 60^0. Úhlopříčka BC' boční stěny $BCC'B'$ má délku $a\sqrt{6}$ a je kolmá na hranu AC. Určete objem hranolu.

3. Úhel ACB trojúhelníka ABC má velikost 140^0. Osa úhlu ABC protne stranu AC v bodě X. Bod Y leží na straně AB tak, že úhel YCB má velikost 100^0. Určete velikost úhlu YXB.

4. Pro která celá $n > 2$ existují racionální čísla p a q taková, že $\sqrt[3]{n} = p + q\sqrt[3]{2}$?

5. Najděte nejmenší reálné číslo p, při kterém nerovnost

$$a + b - p \cdot \sqrt{ab} \leq \sqrt{a^2 + b^2}$$

platí pro libovolnou dvojici kladných čísel a,b.

6. Zjistěte všechna čísla, která jsou ciferými součty druhých mocnin přirozených čísel (zapsaných v dekadické soustavě).

ZADÁNÍ ÚLOH 43. ROČNÍKU MO, KATEGORIE B

Domácí kolo

1. Pro která reálná čísla a má rovnice

$$x^4 + 6x^3 + ax^2 + 6x + 1 = 0$$

čtyři různé kořeny v oboru reálných čísel?

2. Jestliže pro kladná reálná čísla a, b, c platí $c > a + b$, potom

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc > 2(a + b)^2 c.$$

Dokažte.

3. Nech P je mnohočlen s celočíselnými koeficientami a nech $P(13) = 8\,046$. Dokážte, že súčet koeficientov mnohočlena P nie je prvočíslo.

4. V pravoúhlém trojúhelníku ABC s odvěsnami délek $|AC| = 3\,\mathrm{cm}$, $|BC| = 4\,\mathrm{cm}$ označme M průsečík osy úhlu ACB a přepony AB. Dokažte, že vzdálenost středů O_1, O_2 kružnic vepsaných trojúhelníkům AMC, BMC je $\frac{1}{7}\sqrt{340 - 170\sqrt{2}}$ cm.

5. Určete největší možný počet částí, na něž n kružnic rozdělí rovinu (n je dané přirozené číslo).

6. Určete největší možný objem čtyřbokého jehlanu $ABCDV$, jehož základnou je kosočtverec $ABCD$ se stranou délky a a jehož stěnové výšky z vrcholu V na hrany AB, CD mají délku h.

ZADÁNÍ ÚLOH 43. ROČNÍKU MO, KATEGORIE C

Domácí kolo

1. Pavouk Hubert usoukal pavučinu, jejíž tvar je vyznačen na obrázku. Po práci se oddal zaslouženému odpočinku v jednom rohu pavučiny (A), když tu se najednou v protějším rohu (B) chytla moucha. Kolik cest nejkratší délky spojujících tyto dva rohy má Hubert k dispozici?

2. Najděte všechny dvojice přirozených čísel m a n, pro které platí

$$m!\,n! = (mn)^2.$$

(Číslo $m!$ je součin všech přirozených čísel i, $1 \leq i \leq m$, $1!=1$.)

3. Šachového turnaje hraného systémem každý s každým se zúčastnili pouze prváci a druháci. Ačkoliv druháků bylo třikrát víc než prváků, získali dohromady pouze o 3 body víc než prváci. Kolik žáků se zúčastnilo turnaje?

4. V městě Little York je 10 severojižních ulic a 10 východozápadních ulic, které se protínají ve sto křižovatkách. Autobus má po uzavřeném okruhu projet všechny křižovatky. Navrhněte jeho trasu tak, aby počet změn směru jízdy byl co nejmenší.

5. Na stranách trojúhelníka ABC jsou sestrojeny body A_1, B_1, C_1 tak, že $|AC_1| = \frac{1}{3}|AB|$, $|BA_1| = \frac{1}{3}|BC|$, $|CB_1| = \frac{1}{3}|AC|$. Nechť P, Q, R jsou vzájemné průsečíky přímek AA_1, BB_1 a CC_1. Porovnejte obsah trojúhelníka PQR se součtem obsahů trojúhelníků vyznačených na obrázku.

6. Uvažujme trojúhelník ABC, pro jehož průsečík výšek M platí $|AB| = |CM|$. Vypočtěte velikost úhlu při vrcholu C trojúhelníku ABC.