KOMENTÁŘE ÚLOH 43. ROČNÍKU MO, KATEGORIE A

1. Přirozené číslo $m > 1$ nazveme $k-$násobným dělitelem přirozeného čísla n, pokud platí rovnost $n = m^k q$, kde q je celé číslo, které není násobkem čísla m. Určete, kolik sedminásobných dělitelů má číslo $100! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 100$.

Řešení. Odvodíme nejprve obecný vzorec pro počet $P_k(n)$ všech $k-$násobných dělitelů čísla n s rozkladem $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_N^{a_N}$, kde p_i jsou navzájem různá prvočísla a exponenty a_i jsou celá nezáporná čísla. Platí $m^k | n$, právě když m je tvaru $p_1^{b_1} p_2^{b_2} \ldots p_N^{b_N}$, kde celá b_i splňují $0 \le b_i \le \frac{a_i}{k}$ pro každé i. Proto je takových čísel m právě $\prod_{i=1}^N (1 + [\frac{a_i}{k}])$. Hodnotu $P_k(n)$ určíme, když od počtu čísel m s vlastností $m^k|n$ odečteme počet těch z nich, pro které dokonce platí $m^{k+1}|n$, takže

$$P_k(n) = \prod_{i=1}^N \left(1 + \left[\frac{a_i}{k}\right]\right) - \prod_{i=1}^N \left(1 + \left[\frac{a_i}{k+1}\right]\right). \tag{1}$$

Nyní určíme rozklad čísla $100! = 2^{a_1}\, 3^{a_2}\, 5^{a_3} \ldots$. Podle vzorce (viz např. ŠMM sv. "O velkých číslach", str. 37) má prvočíslo p v rozkladu čísla $n!$ exponent rovný

$$\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \left[\frac{n}{p^4}\right] + \ldots \tag{2}$$

(pouze konečný počet sčítanců je nenulových). Takto můžeme stanovit prvočíselný rozklad $100! = 2^{97}\, 3^{48}\, 5^{24}\, 7^{16}\, 11^9\, 13^7\, 17^5 \ldots$, kde tečky vyznačují další prvočísla, jejichž exponenty jsou menší než 7, a tedy neovlivní hodnotu

$$\begin{aligned} &P_7(100!) = \\ &= \left(1 + \left[\frac{97}{7}\right]\right)\left(1 + \left[\frac{48}{7}\right]\right)\left(1 + \left[\frac{24}{7}\right]\right)\left(1 + \left[\frac{16}{7}\right]\right)\left(1 + \left[\frac{9}{7}\right]\right)\left(1 + \left[\frac{7}{7}\right]\right) - \\ &- \left(1 + \left[\frac{97}{8}\right]\right)\left(1 + \left[\frac{48}{8}\right]\right)\left(1 + \left[\frac{24}{8}\right]\right)\left(1 + \left[\frac{16}{8}\right]\right)\left(1 + \left[\frac{9}{8}\right]\right) = \\ &= 14 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 - 13 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 4\,704 - 2\,184 = 2\,520. \end{aligned}$$

Návodné úlohy. (N1) Určete a) násobnost každého dělitele čísla 144; b) všechny dvojnásobné dělitele čísla 10^{15}. (N2) Odvoďte vzorce (1) a (2).

2. Základnou trojbokého hranolu $ABCA'B'C'$ je pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník ABC s odvěsnami AB, AC dané délky a. Boční hrany AA', BB', CC' svírají s rovinami základen úhel 60^0. Úhlopříčka BC' boční stěny $BCC'B'$ má délku $a\sqrt{6}$ a je kolmá na hranu AC. Určete objem hranolu.

Řešení. Objem našeho hranolu je $V = a^2 \cdot v/2$, kde v je neznámá vzdálenost jeho podstav. Obě přímky BC' a AB, a tedy i rovina ABC', jsou kolmé na přímku

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

AC. Je-li P kolmý průmět bodu C' na přímku AB, pak obě přímky AB a AC, a tedy i rovina ABC, jsou kolmé na přímku $C'P$. Hledaná vzdálenost v je proto rovna $|C'P|$ a oba úhly CPC', APC' jsou pravé. Navíc $|\sphericalangle PCC'| = 60^0$, takže $v = |CP|\sqrt{3}$. Označme x souřadnici bodu P na přímce AB v soustavě, ve které $A=[0]$ a $B=[-a]$ (tj. $x=\pm|AP|$, kde znaménko $-$ resp. $+$ vezmeme podle toho, zda P padne na polopřímku AB či na polopřímku opačnou.) Pak z $\triangle ACP$ plyne $|CP|^2=a^2+x^2$, takže $v^2=3(a^2+x^2)$. Protože $|BC'|=a\sqrt{6}$, má Pythagorova věta pro $\triangle BPC'$ tvar $6a^2 = (a+x)^2+3(a^2+x^2)$. Tato rovnice má dva kořeny $x_1=a/2$, $x_2=-a$. Podmínky úlohy proto splňují dva hranoly (obr. 1, 2) o výškách

$$v_1 = \sqrt{3\left(a^2+\frac{a^2}{4}\right)} = \frac{a\sqrt{15}}{2} \quad \text{respektive} \quad v_2 = \sqrt{3(a^2+a^2)} = a\sqrt{6}\,,$$

ověřte. Jejich objemy jsou $V_1 = a^3\sqrt{15}/4$ respektive $V_2 = a^3\sqrt{6}/2$.

3. Úhel ACB trojúhelníka ABC má velikost 140^0. Osa úhlu ABC protne stranu AC v bodě X. Bod Y leží na straně AB tak, že úhel YCB má velikost 100^0. Určete velikost úhlu YXB.

Řešení. Nechť P značí kolmý průmět bodu X na přímku BC (obr. 3). Protože platí $|\sphericalangle XCY|=40^0=|\sphericalangle XCP|$, leží bod X nejen na ose úhlu ABC, ale také na ose úhlu YCP. Proto má bod X stejnou vzdálenost od tří přímek AB, BC a CY, takže leží i na ose úhlu AYC, tj. $|\sphericalangle AYX| = |\sphericalangle AYC| : 2$. Označíme-li $\beta = |\sphericalangle ABC|$, pak $|\sphericalangle CYB|=80^0-\beta$, $|\sphericalangle AYC|=100^0+\beta$ a $|\sphericalangle AYX|=50^0+\frac{\beta}{2}$, tedy $|\sphericalangle XYB|=130^0-\frac{\beta}{2}$. Z $\triangle XYB$ konečně plyne $|\sphericalangle YXB|=180^0-(130^0-\frac{\beta}{2})-\frac{\beta}{2}=50^0$.

4. Pro která celá $n > 2$ existují racionální čísla p a q taková, že $\sqrt[3]{n} = p + q\sqrt[3]{2}$?

Řešení. Umocněním na třetí dostaneme ekvivalentní rovnost

$$n = (p^3 + 2q^3) + 3p^2q\sqrt[3]{2} + 3pq^2\sqrt[3]{4}\,. \tag{1}$$

Zabývejme se nejdříve případem $n = 4$. Je-li $\sqrt[3]{4} = p + q\sqrt[3]{2}$, pak z (1) plyne

$$4 = (p^3 + 2q^3) + 3p^2q\sqrt[3]{2} + 3pq^2(p + q\sqrt[3]{2})\,, \tag{2}$$

neboli $4 - p^3 - 2q^3 - 3p^2q^2 = \sqrt[3]{2}(3p^2q + 3pq^3)$. Protože $\sqrt[3]{2}$ je iracionání číslo, je poslední rovnost možná, jen když $4 - p^3 - 2q^3 - 3p^2q^2 = 0$ a $3pq(p + q^2) = 0$. Z druhé rovnice plyne $p = 0$, $q = 0$ nebo $p = -q^2$, dosazením do první pak po řadě $q^3 = 2$, $p^3 = 4$ resp. $q^6 + q^3 - 2 = 0$. Protože čísla p a q jsou racionální, je z poslední trojice splnitelná jen třetí podmínka, která znamená, že $q^3 = -2$ nebo $q^3 = 1$. Dostáváme tak jedinou dvojici $(p, q) = (-1, 1)$, pro kterou sice platí (2), ne však $\sqrt[3]{4} = p + q\sqrt[3]{2}$. Proto poslední rovnost nesplňují žádná racionální p a q.

Z dokázaného plyne: platí-li (1) pro některá racionální n, p a q, pak koeficient $3pq^2$ u členu $\sqrt[3]{4}$ musí být roven nule. V opačném případě by šlo z (1) vyjádřit

$$\sqrt[3]{4} = \frac{n - p^3 - 2q^3}{3pq^2} - \frac{p}{q} \cdot \sqrt[3]{2}\,,$$

což by byl spor. Proto platí $3pq^2 = 0$, tj. $p = 0$ nebo $q = 0$. Pak ovšem $n = p^3$ nebo $n = 2q^3$. Je-li navíc číslo n celé, musí být v posledních dvou rovnostech i čísla p, q celá. Odpověď: $n = k^3$ nebo $n = 2k^3$, kde $k > 1$ je celé číslo.

Návodné a doplňující úlohy. (N1) Dokažte, že čísla $\sqrt[3]{2}$ a $\sqrt[3]{4}$ jsou iracionální.

(N2) Je-li p racionální a některé z čísel p^3, $2p^3$, $4p^3$ je celé, pak i číslo p je celé, dokažte. (N3) Odpovězte na otázku z úlohy nejprve pro $n = 4$.

(D1) Pro která celá n je číslo $(1 + \sqrt[3]{2})^n$ racionální?

(D2) Platí-li rovnost $\sqrt[3]{x} = p + q\sqrt[3]{2} + r\sqrt[3]{4}$ pro racionální x, p, q a r, pak aspoň dvě z čísel p,q,r jsou rovna nule, dokažte. (Návod: $x = A + B\sqrt[3]{2} + C\sqrt[3]{4}$, kde racionální koeficienty A,B,C závisí na p,q,r tak, že $rB - qC = p(4r^3 - 3q^3)$. Podle úlohy musí platit $B{=}C{=}0$.)

5. Najděte nejmenší reálné číslo p, při kterém nerovnost

$$a + b - p \cdot \sqrt{ab} \le \sqrt{a^2 + b^2} \tag{1}$$

platí pro libovolnou dvojici kladných čísel a,b.

Řešení. Dosadíme-li do (1) $a = b = 1$, dostaneme nutnou podmínku na číslo p: $p \ge 2 - \sqrt{2}(> 0)$. Ukažme, že pro $p = 2 - \sqrt{2}$ nerovnost (1) platí. Pro $p > 0$ lze nerovnost $a + b \le p \cdot \sqrt{ab} + \sqrt{a^2 + b^2}$ ekvivalentně umocnit na druhou, po úpravě dostaneme $(2 - p^2)ab \le 2p\sqrt{ab(a^2 + b^2)}$. Dosadíme-li sem $p = 2 - \sqrt{2}$, dostaneme (po dělení dvěma) nerovnost $2(\sqrt{2} - 1)ab \le (2 - \sqrt{2})\sqrt{ab(a^2 + b^2)}$. Protože $2 - \sqrt{2} = \sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)$, je možné poslední po dělení kladným výrazem $(\sqrt{2} - 1)\sqrt{2ab}$ zjednodušit na $\sqrt{2ab} \le \sqrt{a^2 + b^2}$. Tato nerovnost platí pro libovolná kladná a, b, neboť je ekvivalentní s $2ab \le a^2 + b^2$, neboli $0 \le (a - b)^2$. Hledané nejmenší p je tedy rovno $2 - \sqrt{2}$.

Návodné a doplňující úlohy. (N) Zjistěte, pro která reálná čísla p platí nerovnost $p \cdot ab \le a^2 + b^2$ s libovolnými kladnými čísly a, b.

(D) Pro každou z nerovností $a^4+b^4 \ge p(a^3b+ab^3)$, $a\sqrt{a}+b\sqrt{b} \ge p(a\sqrt{b}+b\sqrt{a})$ a $2(a^2+b^2)+a+b \ge p(ab+a\sqrt{b}+b\sqrt{a})$ řešte stejný úkol jako v (N).

6. Zjistěte všechna čísla, která jsou ciferným součty druhých mocnin přirozených čísel (zapsaných v dekadické soustavě).

Řešení. Ciferný součet $S(n)$ každého čísla n dává při dělení devíti týž zbytek jako samo číslo n. Protože číslo n^2 je tvaru $9k$ nebo $3k+1$ (podle toho zda $3|n$ či nikoliv), leží každé číslo $S(n^2)$ v množině $\{9, 18, 27, \dots\} \cup \{1, 4, 7, 10, \dots\}$. Nyní je třeba zjistit, pro která k mají rovnice $S(n^2)=9k$ resp. $S(n^2)=3k+1$ aspoň jedno řešení n. Ukážeme, že je tomu tak pro každé k. Předně $S(1^2)=1$. Dále pozorujme příklady

$$3^2 = 9,\ 33^2 = 1089,\ 333^2 = 110889,\ 3333^2 = 11108889,\ \dots$$
$$2^2 = 4,\ 32^2 = 1024,\ 332^2 = 110224,\ 3332^2 = 11102224,\ \dots$$

Označme e_k číslo zapsané k jedničkami a vyslovme hypotézu, že $S(n^2) = 9k$ pro $n=3e_k$ a $S(n^2)=3k+1$ pro $n=3e_k-1$. K jejímu důkazu stačí ověřit rovnosti

$$\begin{aligned} (3e_k)^2 &= \underbrace{11\dots1}_{k-1}0\underbrace{88\dots8}_{k-1}9 = 10^{k+1}e_{k-1} + 80e_{k-1} + 9, \\ (3e_k-1)^2 &= \underbrace{11\dots1}_{k-1}0\underbrace{22\dots2}_{k-1}4 = 10^{k+1}e_{k-1} + 20e_{k-1} + 4. \end{aligned} \tag{1}$$

I když rovnosti (1) je možné ověřit dosazením formulí $e_m=(10^m-1)/9$ pro $m=k$ a $m=k-1$, je možný jiný postup: Protože $9e_k=10^k-1$, platí $9e_k^2=(10^k-1)e_k$, a tedy

$$\begin{aligned} (3e_k)^2 &= 10^k e_k - e_k, \\ (3e_k-1)^2 &= 9e_k^2 - 6e_k + 1 = 10^k e_k - 7e_k + 1. \end{aligned} \tag{2}$$

Dekadický zápis pravých stran (2) už lze snadno zjistit užitím pravidel pro písemné sčítání a odčítání - proveďte sami.

Návodné a doplňující úlohy. (N1) S pomocí tabulek nebo kalkulaček určete čísla $S(n^2)$ pro všechna dvojciferná n a pak vyslovte hypotézu o tvaru hledaných čísel.

(N2) Pro které cifry a, b dokážete popsat ciferný zápis druhé mocniny čísla $\overline{aa\dots ab}$ s libovolným počtem cifer a? (Experimentujte s kalkulačkou.)

(D1) Která čísla jsou ciferným součty čísel n^2, $n=1, 2, \dots$, zapsaných ve dvojkové soustavě? (Návod: $S_2(n^2) = k$ pro $n=2^k-1$ s libovolným celým $k \ge 1$.)

V případě volného místa doplnit o Leischnerovy náměty:

Příprava k úloze č. 2: Odvárko, Matematika pro 2. roč. G, , SPN 1985, str. 323 př.2 a str. 338 př.2.

Návod k úloze č. 3: Trik úlohy je v tom , že není ze zadání příliš "vidět", že bod X leží na ose vnějšího úhlu $\triangle CYB$, a tedy je středem kružnice připsané ke straně CY. Řešitele můžeme k tomuto zjištění navést např. otázkou, zda dokáží porovnat vzdálenosti bodu X od přímek AB, BC a CY. Jako doplněk možno procvičovat vlastnosti kružnic vepsaných a připsaných danému trojúhelníku (délky úseků od vrcholů k bodům dotyku stran a kružnic, velikosti úhlů mezi spojnicemi vrcholů a středů kružnic).