DOMÁCÍ KOLO 47. ROČNÍKU MO, KATEG. ABC

A47 Domácí kolo

1. Číslo $1997^{2^n} - 1$ je dělitelné číslem 2^{n+2} pro každé přirozené číslo n. Dokažte. (P. Kaňovský)

2. Je dán libovolný trojúhelník ABC. Osa vnitřního úhlu BAC protne stranu BC v bodě, který označíme U. Dokažte rovnost $|AU|^2 = |AB| \cdot |AC| - |BU| \cdot |CU|$. Může tato rovnost platit, nahradíme-li bod U jiným vnitřním bodem strany BC? (J. Šimša)

3. V jistém jazyce jsou pouze dvě písmena A a B. Pro slova tohoto jazyka platí:

1) Jediné slovo délky 1 je A.

2) Libovolná skupina písmen $X_1X_2X_3\dots X_nX_{n+1}$, kde $X_i = A$ nebo $X_i = B$ pro každý index i, tvoří slovo délky $n+1$, právě když obsahuje aspoň jedno písmeno A a přitom není tvaru $X_1X_2\dots X_nA$, kde $X_1X_2\dots X_n$ je slovo délky n.

Najděte

a) všechna slova délky 4,

b) vzorec pro počet p_n všech slov délky n. (J. Zhouf)

4. Daný čtyřstěn $ABCD$ má shodné protější hrany: $|AB| = |CD| = p$, $|AC| = |BD| = q$ a $|AD| = |BC| = r$. Označme K střed hrany AB a L střed hrany CD.

a) Dokažte, že přímka KL je kolmá k oběma hranám AB a CD.

b) Ukažte, že nejmenší možná hodnota součtu $|AE|^2 + |EF|^2 + |FC|^2$, kde E a F jsou libovolné body příčky KL, je rovna $\dfrac{2p^2+q^2+r^2}{6}$. (P. Leischner)

5. Kuličky sedmi různých barev jsou rozděleny do sedmi pytlíků tak, že v každých dvou pytlících najdeme po kuličce téže barvy. Dokažte:

a) Kuličky některé barvy jsou zastoupeny v aspoň třech pytlících.

b) Pokud byly rozděleny od každé barvy jen 3 kuličky, pak v žádném pytlíku nenajdeme dvě kuličky téže barvy.

Rozhodněte rovněž, zda takové rozdělení kuliček je za podmínky z tvrzení b) vůbec možné. (P. Hliněný)

6. Je dán pravoúhlý lichoběžník se základnami a, c ($a > c$) a delším ramenem b. Sestrojte přímku, která daný lichoběžník rozdělí na dva navzájem podobné čtyřúhelníky. Proveďte diskusi o počtu řešení vzhledem k délkám a, b, c. (J. Švrček)

B47 Domácí kolo

1. Magický čtverec je čtvercová tabulka přirozených čísel, v níž je součet všech čísel v každém řádku, v každém sloupci i na obou úhlopříčkách stejný. Najděte všechny magické čtverce 3×3, pro které je součin čtyř čísel v rohových polích roven 3 465. (P. Černek)

2. V rovině je dána přímka q a bod A, který na ní neleží. Určete v této rovině množinu středů S všech čtverců $ABCD$ takových, že bod B leží na přímce q. (J. Molnár)

3. Dokažte, že pro každou trojici x, y, z kladných čísel platí nerovnost

$$\sqrt{xyz}\left(\frac{2}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{2}{z+x}\right) \leqq \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}\,.$$

Zjistěte, kdy nastane rovnost. (J. Švrček)

4. Je dán čtyřstěn, v němž každé dvě protilehlé hrany jsou shodné. Uvnitř čtyřstěnu existuje bod M, který je stejně vzdálen od všech jeho stěn. Dokažte, že každá výška daného čtyřstěnu je rovna čtyřnásobku vzdálenosti bodu M od jeho stěn. (P. Leischner)

5. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= x^2 - z^2 + p \\ y + 2z + 3x &= y^2 - x^2 + p \\ z + 2x + 3y &= z^2 - y^2 + p \end{aligned} \quad ,$$

kde p je reálný parametr. Proveďte diskusi o počtu řešení vzhledem k parametru p. (J. Šimša)

6. Jaký největší obsah může mít konvexní čtyřúhelník, v němž obě úsečky spojující středy protilehlých stran jsou shodné a mají danou délku d? (J. Zhouf)

C47 Domácí kolo

1. Pro libovolné trojciferné číslo určíme jeho zbytky při dělení čísly 2, 3, 4, … , 10 a získaných devět čísel pak sečteme. Zjistěte nejmenší možnou hodnotu takového součtu. (J. Šimša)

2. Najděte všechny trojúhelníky ABC, pro které platí $a + v_a = b + v_b$ při obvyklém označení stran a výšek trojúhelníku. (P. Černek)

3. Sto dětí se rozdělilo do tří družstev A, B a C. Poté, co jedno dítě přestoupilo z A do B, jedno z B do C a jedno z C do A, se průměrná hmotnost dětí zvýšila v družstvu A o 120 g, v družstvu B o 130 g, zatímco v družstvu C se snížila o 240 g. Kolik dětí bylo v jednotlivých družstvech? (P. Černek)

4. Uvnitř daného pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku ABC s přeponou AB zvolíme libovolně bod X. Sestrojíme přímky p a q, které procházejí bodem X tak, že $p \parallel AB$ a $q \perp AB$. Trojúhelník ABC vytíná na přímce p úsečku KL, na přímce q úsečku MN. Určete všechny body X, pro které platí $|KL| = 2 \cdot |MN|$. (J. Šimša)

5. Řešte soustavu

$$\begin{aligned} 7[x] + 2y &= 117{,}4 \\ 5x + 2[y] &= 91{,}9 \end{aligned} \quad ,$$

kde $[a]$ je tzv. celá část reálného čísla a, tj. celé číslo, pro které platí $[a] \leqq a < [a] + 1$. Například $[3{,}7] = 3$ a $[-3{,}7] = -4$. (P. Černek)

6. Sestrojte deltoid se stranami 12 cm a 13 cm, který je svými úhlopříčkami rozdělen na čtyři trojúhelníky, jež jsou čtyřmi stěnami nějakého čtyřstěnu. Zhotovte papírový model tohoto čtyřstěnu. (S. Bednářová, P. Černek)