Řešenídomácího kola kategorie A

1. *Číslo* $1997^{2^n} - 1$ *je dělitelné číslem* 2^{n+2} *pro každé přirozené číslo* n*. Dokažte.*

Řešení: Označme $k = 1997$ a všimněme si, že pro každé n platí

$$k^{2^{n+1}} - 1 = \left(k^{2^n}\right)^2 - 1^2 = \left(k^{2^n} - 1\right)\left(k^{2^n} + 1\right). \tag{1}$$

To nám umožní dokazovat uvedené tvrzení indukcí. Můžeme začít s hodnotou $n = 0$, neboť číslo $k - 1$ je dělitelné číslem 2^2. Protože číslo $k^{2^n} + 1$ je pro každé n sudé, plyne z rozkladu (1), že pokud číslo $k^{2^n} - 1$ je dělitelné číslem 2^{n+2}, je číslo $k^{2^{n+1}} - 1$ dělitelné číslem $2^{n+2} \cdot 2$, tedy číslem 2^{n+3}. Tím je důkaz indukcí ukončen. Dodejme, že místo (1) je možné obdobně využít rovností

$$\left(k^{2^n} - 1\right)^2 = k^{2^{n+1}} - 2 \cdot k^{2^n} + 1 = \left(k^{2^{n+1}} - 1\right) - 2\left(k^{2^n} - 1\right).$$

Doplňující úloha:

Dokažte, že pro žádné přirozené číslo n není rozdíl $1997^{2^n} - 1$ dělitelný číslem 2^{n+3}. [Využijte toho, že poslední činitel napravo v (1) není dělitelný čtyřmi, neboť čtyřmi je dělitelné číslo o 2 menší.]

2. *Je dán libovolný trojúhelník* ABC*. Osa vnitřního úhlu* BAC *protne stranu* BC *v bodě, který označíme* U*. Dokažte rovnost* $|AU|^2 = |AB| \cdot |AC| - |BU| \cdot |CU|$*. Může tato rovnost platit, nahradíme-li bod* U *jiným vnitřním bodem strany* BC*?*

Řešení: Abychom jedním postupem splnili obě části úlohy, hledejme všechny body D strany BC daného trojúhelníku ABC, pro které při označení z obr. 2.1 platí $a_1 a_2 + d^2 = bc$ (srovnejte s rovností ze zadání). Z kosinových vět pro trojúhelníky ABD a ACD

$$c^2 = a_1^2 + d^2 - 2a_1 d \cos\omega$$
$$b^2 = a_2^2 + d^2 + 2a_2 d \cos\omega$$

vyloučíme $\cos\omega$, a to tak, že k a_2-násobku první rovnice přičteme a_1-násobek rovnice druhé. Dostaneme po úpravě $a_1 b^2 + a_2 c^2 = (a_1 a_2 + d^2)(a_1 + a_2)$, odkud vidíme, že rovnost $a_1 a_2 + d^2 = bc$ platí, právě když $a_1 b^2 + a_2 c^2 = bc(a_1 + a_2)$, což je algebraicky ekvivalentní s rovností $a_1 b(b - c) = a_2 c(b - c)$. To znamená, že zkoumaná rovnost v případě $b = c$ platí pro *každý* bod $D \in BC$ (takže odpověď na otázku ze závěru zadání je kladná), zatímco v případě $b \neq c$ platí pro (jediný) bod $D \in BC$, pro který $a_1 b = a_2 c$, neboli $a_1 : a_2 = c : b$. Podle náv. úl. 1 má tuto vlastnost právě ten bod strany BC, který leží na ose úhlu BAC.

Návodné úlohy:

1. Připomeňte si a dokažte významnou vlastnost osy úhlu trojúhelníku: Osa úhlu BAC protne stranu BC v tom bodě U, pro který platí $|BU| : |CU| = |AB| : |AC|$. [Trojúhelníky ABU a ACU mají dvě dvojice shodných výšek, využijte to k dvojímu vyjádření poměru jejich obsahů].

2. Obrat, na kterém je výše uvedené řešení založeno (manipulace se dvěma kosinovými větami), mohou žáci znát z odvozování vzorců pro délky těžnic trojúhelníku tvaru

$$t_a = \sqrt{\frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}}$$

(při našem postupu to odpovídá situaci $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}a$). Připomeňte jim to.

3. *V jistém jazyce jsou pouze dvě písmena* A *a* B*. Pro slova tohoto jazyka platí:*

1) Jediné slovo délky 1 *je* A*.*

2) Libovolná skupina písmen $X_1 X_2 X_3 \dots X_n X_{n+1}$*, kde* $X_i = \{A, B\}$ *pro každý index* i*, tvoří slovo délky* $n + 1$*, právě když obsahuje aspoň jedno písmeno* A *a přitom není tvaru* $X_1 X_2 \dots X_n A$*, kde* $X_1 X_2 \dots X_n$ *je slovo délky* n*.*

Najděte a) všechna slova délky 4*, b) vzorec pro počet* p_n *všech slov délky* n*.*

ŘEŠENÍ: a) Postupně najdeme všechna slova délek 2, 3 a 4. Z možných skupin délky 2 slova nejsou právě BB (neobsahuje žádné A) a AA (je nepřípustného tvaru), takže slova jsou právě AB a BA. Z nich vytvoříme nepřípustné tvary délky 3: ABA a BAA. Ostatní skupiny délky 3 (s výjimkou BBB) tedy slova jsou: AAA, AAB, ABB, BAB, BBA. Připíšeme-li na jejich konec vždy písmeno A, dostaneme pět nepřípustných tvarů délky 4: $AAAA$, $AABA$, $ABBA$, $BABA$, $BBAA$. Ostatní skupiny délky 4 (s výjimkou $BBBB$) jsou tedy hledaná slova: $AAAB$, $AABB$, $ABAA$, $ABAB$, $ABBB$, $BAAA$, $BAAB$, $BABB$, $BBAB$, $BBBA$.

b) Podle části a) víme, že $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_3 = 5$ a $p_4 = 10$. Nyní pro každé $n \geqq 1$ vyjádříme počet p_{n+1} pomocí počtu p_n. K tomu rozdělíme všechna slova délky $n+1$ do dvou skupin podle toho, kterým písmenem končí: těch, která jsou tvaru $\dots A$, je právě $2^n - p_n$ (před posledním A stojí libovolná skupina délky n, jež není slovo); těch, která jsou tvaru $\dots B$, je právě $2^n - 1$ (před posledním B stojí libovolná skupina délky n s výjimkou $BB \dots B$). Proto platí $p_{n+1} = (2^n - p_n) + (2^n - 1) = 2^{n+1} - 1 - p_n$. Z takových vyjádření pro p_{n+1} a p_{n+2} vyplývá: $p_{n+2} = 2^{n+2} - 1 - p_{n+1} = 2^{n+2} - 1 - (2^{n+1} - 1 - p_n) = p_n + 2^{n+1}$. Na základě toho budeme určovat hodnoty p_n odděleně pro sudé a pro liché indexy n:

$$p_{2k-1} = p_{2k-3} + 2^{2k-2} = p_{2k-5} + 2^{2k-4} + 2^{2k-2} = \dots = p_1 + 2^2 + 2^4 + \dots + 2^{2k-4} + 2^{2k-2} =$$

$$= 1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^{k-2} + 4^{k-1} = \frac{4^k - 1}{3},$$

$$p_{2k} = p_{2k-2} + 2^{2k-1} = p_{2k-4} + 2^{2k-3} + 2^{2k-1} = \dots = p_2 + 2^3 + 2^5 + \dots + 2^{2k-3} + 2^{2k-1} =$$

$$= 2 + 2 \cdot 4^1 + 2 \cdot 4^2 + \dots + 2 \cdot 4^{k-2} + 2 \cdot 4^{k-1} = \frac{2 \cdot (4^k - 1)}{3}.$$

Nalezené vzorce platí pro každé $k \geqq 1$. Dodejme, že je lze zapsat jednotným způsobem

$$p_n = \frac{2^{n+2} + (-1)^{n+1} - 3}{6} \qquad (n = 1, 2, 3, 4, \dots)$$

4. *Daný čtyřstěn $ABCD$ má shodné protější hrany: $|AB| = |CD| = p$, $|AC| = |BD| = q$ a $|AD| = |BC| = r$. Označme K střed hrany AB a L střed hrany CD.*

a) Dokažte, že přímka KL je kolmá k oběma hranám AB a CD.

b) Ukažte, že nejmenší možná hodnota součtu $|AE|^2 + |EF|^2 + |FC|^2$, kde E a F jsou libovolné body příčky KL, je rovna $\dfrac{2p^2 + q^2 + r^2}{6}$.

ŘEŠENÍ: a) Úsečka KL je těžnicí trojúhelníku ABL (obr. 4.1). Proto vztah $KL \perp AB$ platí, právě když $|AL| = |BL|$. Úsečky AL a BL jsou ale těžnice ve shodných (podle věty sss) trojúhelnících ADC a BCD, jsou tedy shodné. Podobně se z trojúhelníku CDK vysvětlí, proč $KL \perp CD$. K předchozímu ještě dodejme, že podle Pythagorovy věty a vzorce pro délky těžnic (viz náv. úl. 2 k úloze **2**) platí

$$|KL|^2 = |AL|^2 - |AK|^2 = \frac{2q^2 + 2r^2 - p^2}{4} - \frac{p^2}{4} = \frac{q^2 + r^2 - p^2}{2}.$$

Pro stručnost dále označíme $d = |KL|$; určenou hodnotu d^2 pak dosadíme, až to bude vhodné.

b) Pro libovolné body E, F na příčce KL označíme $x = |KE|$, $y = |LF|$ (obr 4.2). Pak $|EF| = |d - x - y|$,

$$|AE|^2 + |EF|^2 + |FC|^2 = (|AK|^2 + x^2) + (d - x - y)^2 + (|LC|^2 + y^2) = 2 \cdot \frac{p^2}{4} + f(x, y),$$

kde $f(x, y) = x^2 + (d - x - y)^2 + y^2$. Ukažme, že platí odhad $f(x, y) \geqq f(\frac{d}{3}, \frac{d}{3})$, z něhož vyplyne, že nejmenší hodnota součtu $|AE|^2 + |EF|^2 + |FC|^2$ je rovna

$$\frac{p^2}{2} + f(\tfrac{d}{3}, \tfrac{d}{3}) = \frac{p^2}{2} + \frac{d^2}{3} = \frac{p^2}{2} + \frac{q^2 + r^2 - p^2}{6} = \frac{2p^2 + q^2 + r^2}{6}.$$

(Této hodnoty se dosáhne, když $|AE| = |EF| = |FC| = \frac{1}{3}|KL|$.) Zmíněný odhad plyne okamžitě z Cauchyovy nerovnosti $3(u^2 + v^2 + w^2) \geqq (u + v + w)^2$, platné pro libovolnou trojici *reálných* čísel u, v, w. Nechceme-li se na ni odvolávat, můžeme provést algebraické úpravy kvadratických výrazů, kterým obvykle říkáme *doplnění na čtverec*:

$$f(x,y) = x^2 + (d-x-y)^2 + y^2 = 2x^2 - 2x(d-y) + (d-y)^2 + y^2 =$$
$$= 2\Big(x - \frac{d-y}{2}\Big)^2 + \frac{1}{2}(d-y)^2 + y^2 = 2\Big(x - \frac{d-y}{2}\Big)^2 + \frac{3}{2}y^2 - dy + \frac{1}{2}d^2 =$$
$$= 2\Big(x - \frac{d-y}{2}\Big)^2 + \frac{3}{2}\Big(y - \frac{d}{3}\Big)^2 + \frac{1}{3}d^2\,.$$

Hodnota $f(x,y)$ je tedy nejmenší, pokud $x = \dfrac{d-y}{2}$ a $y = \dfrac{d}{3}$, neboli $x = y = \dfrac{d}{3}$.

Jiné řešení: V části a) můžeme postupovat jinak, když využijeme i jindy uplatňovaný trik: daný čtyřstěn doplníme na rovnoběžnostěn. Způsob je patrný z obr. 4.3, kde je čtyřstěn $ABCD$ doplněn na rovnoběžnostěn $AA'BB'C'CD'D$: úsečku $A'B'$ dostaneme posunutím hrany CD o vektor $\overrightarrow{LK}$, úsečku $C'D'$ posunutím hrany AB o vektor $\overrightarrow{KL}$.

Ze shodnosti hran AB a CD plyne, že stěna $AA'BB'$ je rovnoběžník, jehož úhlopříčky jsou shodné, tedy pravoúhelník. Stejnou vlastnost mají i ostatní stěny rovnoběžnostěnu $AA'BB'C'CD'D$, který je proto *kvádr* (každé dvě z hran AA', AB', AC' jsou totiž navzájem kolmé). Tím je tvrzení a) dokázáno. Délku d příčky KL, kterou potřebujeme v části b), nyní určíme jako délku hrany AC'. Označíme-li ještě $e = |AA'|$ a $f = |AB'|$, pak neznámé rozměry d, e, f našeho kvádru můžeme vypočítat pomocí délek p, q, r jeho stěnových úhlopříček, tj. ze soustavy tří Pythagorových vět $d^2 + e^2 = q^2$, $d^2 + f^2 = r^2$, $e^2 + f^2 = p^2$. Tak (bez vzorce pro délku těžnice obecného trojúhelníku) dospějeme ke stejnému výsledku: $d^2 = \dfrac{q^2 + r^2 - p^2}{2}$.

Literatura: Geometrii čtyřstěnů najdete v brožuře S. Horák, Mnohostěny, ŠMM č. 27, Ml. fronta, 1970.

5. *Kuličky sedmi různých barev jsou rozděleny do sedmi pytlíků tak, že v každých dvou pytlících najdeme po kuličce téže barvy. Dokažte:*

a) Kuličky některé barvy jsou zastoupeny v aspoň třech pytlících.

b) Pokud byly rozděleny od každé barvy jen 3 kuličky, pak v žádném pytlíku nenajdeme dvě kuličky téže barvy.

Rozhodněte rovněž, zda takové rozdělení kuliček je za podmínky z tvrzení b) vůbec možné.

Řešení: Označme pytlíky čísly $1, 2, \ldots, 7$ a symbolem b_{ij} tu barvu, od které najdeme po kuličce v pytlících i a j, $1 \leqq i < j \leqq 7$. (Je-li kandidátek na některé b_{ij} více, vybereme libovolnou z nich.) Mezi těmito $\binom{7}{2} = 21$ barvami b_{ij} je dle zadání nejvýše 7 různých.

a) Kdyby kuličky libovolné barvy byly zastoupeny nejvýše ve dvou pytlících, musely by být zmíněné barvy b_{ij} po dvou různé, a to je spor. Dodejme, že tvrzení a) platí, i když se výchozí počet pytlíků sníží ze sedmi na pět (a počet barev rovný sedmi zachová), neboť $\binom{5}{2} > 7$.

b) Předpokládejme, že od každé barvy byly rozděleny jen 3 kuličky. Pak je každá barva zastoupena v nejvýše třech pytlících, takže se každé barvě rovnají nejvýše $\binom{3}{2} = 3$ hodnoty b_{ij}. To je podle úvodního odstavce možné, jen když všech 21 hodnot b_{ij} je tvořeno sedmi trojicemi shodných barev, takže kuličky každé barvy jsou rozděleny po jedné do tří různých pytlíků.

Rozdělení za podmínky z tvrzení b) je možné (a až na permutace barev a pytlíků jediné). Popíšeme ho sedmi tříprvkovými množinami $\{1,2,3\}$, $\{1,4,5\}$, $\{1,6,7\}$, $\{2,4,6\}$, $\{2,5,7\}$, $\{3,4,7\}$ a $\{3,5,6\}$, určujícími, které tři z pytlíků $1, 2, \ldots, 7$ obsahují kuličky jednotlivých barev. (Lze to i interpretovat jinak: které tři z barev $1, 2, \ldots, 7$ jsou zastoupeny v jednotlivých pytlících.) Ověřte, že každá dvě čísla z $\{1, 2, \ldots, 7\}$ leží současně v jedné ze sedmi vypsaných množin (a že každé dvě z těchto množin mají společný prvek).

6. *Je dán pravoúhlý lichoběžník se základnami a, c ($a > c$) a delším ramenem b. Sestrojte přímku, která daný lichoběžník rozdělí na dva navzájem podobné čtyřúhelníky. Proveďte diskusi o počtu řešení vzhledem k délkám a, b, c.*

Řešení: Hledaná přímka EF musí protínat dvě *protější* strany daného lichoběžníku $ABCD$. Nemohou to být základny (obr. 6.1): aby $AEFD$ a $EBCF$ byly podobné čtyřúhelníky, musel by druhý z nich mít (stejně jako ten první) dva vnitřní úhly pravé, a to mohou být jedině úhly při vrcholech E a F; pak by ovšem $AEFD$ byl pravoúhelník, zatímco $EBCF$ nikoliv.

Mají-li být čtyřúhelníky $ABFE$ a $EFCD$ z obr. 6.2 podobné, musí být úhel ABF shodný s jedním z úhlů EFC nebo FED. Tyto dvě možnosti nyní rozlišíme jako a) a b).

a) $|\angle ABF| = |\angle EFC|$. V tomto případě jsou $ABFE$ a $EFCD$ pravoúhlé lichoběžníky (obr. 6.3). Z úměry $|AB| : |EF| = |EF| : |CD|$ vychází

$$|EF| = \sqrt{ac}\,. \tag{1}$$

Konstrukce takové příčky EF je snadná: nejdříve na úsečce AB nalezneme bod F_1, pro který $|AF_1| = \sqrt{ac}$ (tuto délku sestrojíme podle jedné z Eukleidových vět, viz pom. úl. 1); úsečku AF_1 pak doplníme na pravoúhelník AF_1FE. Takto sestrojené čtyřúhelníky $ABFE$ a $EFCD$ jsou skutečně podobné podle pom. úl. 2, podm. (ii).

b) $|\angle ABF| = |\angle FED|$. Podle obr. 6.4 je jasné, že tato rovnost nastane, právě když $EF \perp BC$. Podobnost čtyřúhelníků $ABFE$ a $EFCD$ může být dvojího druhu: $ABFE \sim FEDC$ nebo $ABFE \sim DEFC$. Tyto dvě možnosti nyní rozlišíme jako b1) a b2).

b1) $ABFE \sim FEDC$. Z úměry $|AB| : |FE| = |FE| : |DC|$ opět vychází rovnost (1). Úsečka EF má tedy známou délku a je kolmá k BC, takže se snadno sestrojí. Podobnost $ABFE \sim FEDC$ se pak zdůvodní opět podle pom. úl., podm. (ii).

b2) $ABFE \sim DEFC$. Z úměry $|AB| : |DE| = |AE| : |DC|$ dostáváme

$$|AE| \cdot |DE| = ac\,. \tag{2}$$

Tím je bod E na rameni AD určen a jeho konstrukci lze založit na Eukleidově větě o výšce. Bod F pak sestrojíme kolmým průmětem bodu E na rameno BC. Z takové konstrukce plyne podobnost $\triangle ABE \sim \triangle DEC$ (věta *sus*), a tedy i podobnost $ABFE \sim DEFC$ podle pom. úl., podm. (i).

Diskuse: Protože $c < \sqrt{ac} < a$, řešení z části a) existuje vždy právě jedno.

Část b1): Úsečka (o jejíž délce zatím nic nepředpokládáme), která je kolmá k přímce BC a jejíž krajní body leží uvnitř ramen AD a BC, existuje, jen když kolmý průmět G bodu A na přímku BC padne mezi body B a C (obr. 6.5). Plyne to z toho, že úhel $\beta = \angle ABC$ je ostrý. Nepříznivá situace (obr. 6.6) se vyloučí podmínkou $|BG| < |BC| = b$. Protože $|BG| = a\cos\beta = a \cdot \dfrac{a-c}{b}$, dostáváme po snadné úpravě ekvivalentní podmínku

$$b > \sqrt{a(a-c)}\,. \tag{3}$$

(To je podstatné omezení, a priori totiž zřejmě platí pouze slabší nerovnost $b > a - c$). Ukažme, že podmínka (3) sama o sobě již zaručuje, že konstruovaná příčka EF délky $\sqrt{ac}$ existuje a je jediná. Z trojúhelníků ABG a CHD totiž plyne $|AG| = a\sin\beta$ a $|HC| = \dfrac{c}{\sin\beta}$, takže $|AG| \cdot |HC| = ac$. To znamená, že délka $\sqrt{ac}$ je geometrickým průměrem délek základen AG a HC pravoúhlého lichoběžníku $GAHC$. Proto příčka EF existuje, je jediná a při její konstrukci lze postupovat způsobem z části a) našeho řešení, uvažujeme-li lichoběžník $GAHC$ namísto lichoběžníku $ABCD$. Jiné pěkné vysvětlení poskytuje obr. 6.7, ve kterém podle Eukleidovy věty o odvěsnách pravoúhlého trojúhelníku ABX máme $|ZC| = |AX| = \sqrt{ac}$ a $|BX| = \sqrt{a(a-c)}$; nerovnosti $|HC| < \sqrt{ac} < |AG|$ proto plynou z tupoúhlých trojúhelníků ZCH a AGX.

Část b2): Bod E určený rovností (2) na rameni AD délky d existuje, právě když $\frac{1}{4}d^2 \geqq ac$ (plyne to z průběhu kvadratické funkce $f(x) = x(d-x)$ na intervalu $x \in (0, d)$, kde $x = |AE|$). Protože $d^2 = b^2 - (a-c)^2$, dostáváme odtud snadnou úpravou existenční podmínku

$$b \geqq a + c\,, \tag{4}$$

která je silnější než (3), takže pro úsečku AG zajišťuje potřebnou polohu z obr. 6.5. Pomocí vyjádření $|DH| = c \cdot \operatorname{cotg} \beta = c \cdot \dfrac{a-c}{d}$ se snadným výpočtem ověří, že za podmínky (4) platí obě nerovnosti $|DH| < \frac{1}{2}d$ a $|AH| \cdot |DH| < ac$, které zaručují, že každý bod E úsečky AD splňující (2) je vnitřním bodem úsečky AH (takové body jsou dva, resp. jeden, platí-li v (4) ostrá nerovnost, resp. rovnost). Proto kolmý průmět F takového bodu E na přímku BC skutečně padne mezi body B a C.

ZÁVĚR DISKUSE: Úloha má

- ▲ 1 řešení, je-li $a - c < b \leqq \sqrt{a(a-c)}$,
- ▲ 2 řešení, je-li $\sqrt{a(a-c)} < b < a + c$,
- ▲ 3 řešení, je-li $b = a + c$,
- ▲ 4 řešení, je-li $b > a + c$.

JINÉ ŘEŠENÍ: Popišme jiný rozbor částí b1) a b2) předchozího postupu. V první z nich z rovnosti úhlů CED a EBF (obr. 6.8) na základě věty o obvodovém a úsekovém úhlu (pom. úl. 3) usoudíme, že přímka AD je tečnou ke kružnici opsané trojúhelníku ECB. Tuto kružnici umíme sestrojit, neboť má procházet danými body B, C a dotýkat se dané úsečky AD (pom. úl. 4). Příslušný bod dotyku je hledaný bod E, jeho kolmým průmětem na rameno BC dostaneme bod F. Podobnost $ABFE \sim FEDC$ je pak zaručena podle pom. úl. 2, podm. (i), neboť $\triangle BFE \sim \triangle EDC$ podle věty uu.

Část b2): Z rovnosti úhlů CEF a EBF (obr. 6.9) usoudíme, že úhel BEC je pravý. Proto lze bod E sestrojit jako průsečík úsečky AD s Thaletovou kružnicí nad průměrem BC; bod F pak dostaneme stejně jako v části b1). Jako tam se dokáže i podobnost $ABFE \sim DEFC$, tentokrát na základě toho, že $\triangle BFE \sim \triangle EFC$.

POMOCNÉ ÚLOHY:

1. Připomeňte si a pomocí podobných trojúhelníků dokažte Eukleidovy věty o výšce a odvěsnách pravoúhlého trojúhelníku: $v^2 = c_a \cdot c_b$, $a^2 = c \cdot c_a$ a $b^2 = c \cdot c_b$.

2. Čtyřúhelníky $KLMN$ a $PQRS$ se shodují ve vnitřních úhlech, jak je vyznačeno na obr. 6.10. Dokažte, že tyto čtyřúhelníky jsou podobné, je-li splněna některá z podmínek:

(i) $\triangle KLM \sim \triangle PQR$, (ii) strany KN a LM nejsou rovnoběžné a $|KL| : |PQ| = |MN| : |RS|$.
[Vysvětlete, že pokud $\triangle KLM \sim \triangle PQR$, platí rovněž $\triangle KMN \sim \triangle PRS$ podle věty uu, přičemž obě podobnosti mají stejný koeficient $|KM| : |PR|$. Za podmínky (ii) převeďte podobným zobrazením čtyřúhelník $PQRS$ na čtyřúhelník $KLM'N'$ tak, aby body M', N' ležely po řadě na polopřímkách LM a KN. Úsečky MN a $M'N'$ jsou pak shodné a rovnoběžné; kdyby nebyly totožné, byl by $MNN'M'$ rovnoběžník, takže strany KN a LM by byly rovnoběžné.]

3. Co jsou obvodové, středové a úsekové úhly a jaké mají vlastnosti? Dokažte je.

4. Sestrojte kružnici která prochází danými body K, L a dotýká se dané přímky p, jež je s přímkou KL různoběžná. [Bod dotyku T přímky p s hledanou kružnicí je určen podmínkou $|PT|^2 = |PK| \cdot |PL|$, kde P je průsečík přímek p a KL.]

5. (Doplňující úloha) Dané body A, B leží uvnitř téže poloroviny vyťaté danou přímkou p. Na přímce p sestrojte bod X tak, aby velikost konvexního úhlu AXB byla co největší. [Rozhledy mat.-fyz., roč. 62, č. 4, str. 168–169.]