47. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Úlohy domácího kola kategorie B

1. *Magický čtverec je čtvercová tabulka přirozených čísel, v níž je součet všech čísel v každém řádku, v každém sloupci i na obou úhlopříčkách stejný. Najděte všechny magické čtverce* 3×3*, pro které je součin čtyř čísel v rohových polích roven* $3\,465$.

Řešení. Označme přirozená čísla v magickém čtverci písmeny a, b, c, d, e, f, g, h, i jako na obr. 1.1 a písmenem S označme součet tří čísel v každém řádku, sloupci i úhlopříčce. Ukážeme, že je $S = 3e$: Sečteme-li totiž čísla v prvním a třetím řádku a od výsledku odečteme čísla v prostředním sloupci, dostaneme rovnost

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Obr. 1.1

$$S + S - S = a + c + g + i - e.$$

Odtud vzhledem k rovnostem $a + i = c + g = S - e$ plyne

$$S = (S - e) + (S - e) - e, \quad \text{neboli} \quad S = 3e.$$

Důsledkem jsou rovnosti

$$a + i = c + g = 2e.$$

Hledejme tedy čtyři přirozená čísla a, i, c, g, jejichž součin je roven číslu $3\,465$, a přitom $a + i = c + g$. Probrat konečnou množinu řešení rovnice $aicg = 3\,465$ můžeme tak, že nejprve vypíšeme všechny možné rozklady čísla $3\,465 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ na součin dvou činitelů M a N (jež by měly odpovídat součinům ai a cg):

$$\begin{aligned} 3\,465 &= 1 \cdot 3\,465 = 3 \cdot 1\,155 = 5 \cdot 693 = 7 \cdot 495 = 9 \cdot 385 = \\ &= 11 \cdot 315 = 15 \cdot 231 = 21 \cdot 165 = 33 \cdot 105 = 35 \cdot 99 = \\ &= 45 \cdot 77 = 55 \cdot 63. \end{aligned}$$

Nyní pro jednotlivé dvojice M, N snadno vyhledáme rozklady $M = ai$ a $N = cg$ s vlastností $a + i = c + g$ (pro prvních osm dvojic takové rozklady zřejmě neexistují). Jediné dva vyhovující rozklady jsou

$$3\,465 = (5 \cdot 11) \cdot (7 \cdot 9) = (3 \cdot 15) \cdot (7 \cdot 11).$$

V prvním případě $2e = 16$, tedy $e = 8$; v druhém $2e = 18$, tedy $e = 9$. Snadno dopočteme i ostatní čísla magického čtverce (obr. 1.2).

5	12	7
10	8	6
9	4	11

3	17	7
13	9	5
11	1	15

Obr. 1.2

Protože čtyři rohová čísla můžeme do tabulky umístit osmi způsoby, je každá tabulka na obr. 1.2 zástupcem osmi tabulek, jež z ní vzniknou „překlopením" podle os souměrnosti čtverce. Jiná řešení úlohy neexistují.

Průpravná a doplňující úloha:

1. Podrobně zdůvodněte žákům, že středové číslo magického čtverce 3×3 je aritmetickým průměrem čísel v rohových polích, ale také aritmetickým průměrem zbylých čtyř čísel v prostředním řádku a sloupci magického čtverce.
2. Dokažte, že každý magický čtverec 3×3 vypadá jako na obr. 1.3.

$e-x$	$e+x+y$	$e-y$
$e+x-y$	e	$e-x+y$
$e+y$	$e-x-y$	$e+x$

Obr. 1.3

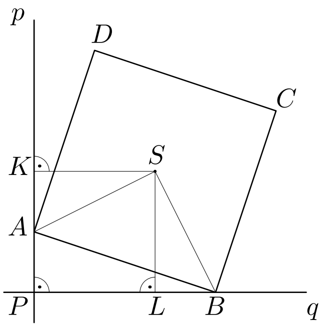
2. *V rovině je dána přímka q a bod A, který na ní neleží. Určete v této rovině množinu středů S všech čtverců $ABCD$ takových, že bod B leží na přímce q.*

Řešení. Uvažujme přímku p, která prochází bodem A a je kolmá na přímku q. Označme P patu kolmice p. S každým čtvercem daných vlastností lze uvažovat čtverec, který je s ním symetrický podle přímky p a rovněž vyhovuje podmínkám úlohy. Odtud plyne, že vyšetřovaná množina středů S všech čtverců $ABCD$ daných vlastností je rovinný útvar, který je symetrický podle přímky p. Uvažujme nyní takový čtverec, jehož vrcholy jsou označeny A, B, C, D proti směru chodu hodinových ručiček.

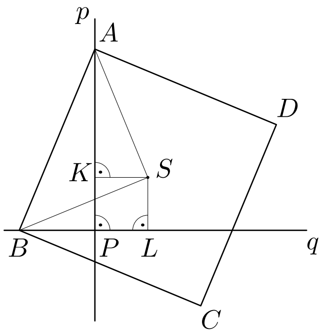
Dále rozlišíme tři případy polohy jeho vrcholů C, D v rovině:

a) oba vrcholy C, D leží v polorovině qA (obr. 2.1),
b) pouze vrchol D leží v polorovině qA (obr. 2.2),
c) žádný z vrcholů C, D neleží v polorovině qA (obr. 2.3).

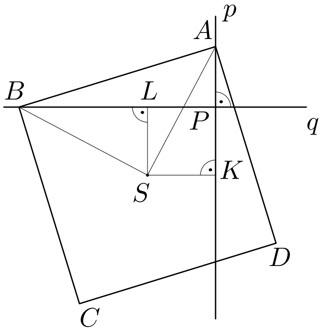
V případě a) označme K, L po řadě paty kolmic ze středu S uvažovaného čtverce $ABCD$ na přímky p, q. Vzhledem k tomu, že platí $|\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle KSL| = 90°$, je pravoúhlý trojúhelník BSL obrazem pravoúhlého trojúhelníku ASK v otočení se středem S o úhel $+90°$. Proto platí $|SK| = |SL|$. Stejný závěr



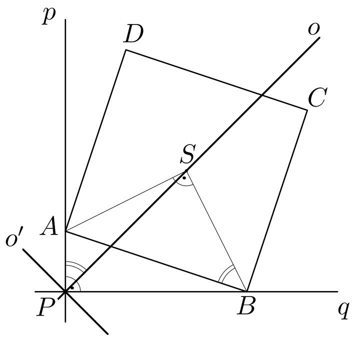
Obr. 2.1



Obr. 2.2



Obr. 2.3



Obr. 2.4

zdůvodníme obdobně i v případech b) a c) (obr. 2.2 a 2.3). Střed S uvažovaného čtverce $ABCD$ tudíž vždy leží na ose o úhlu KPL.

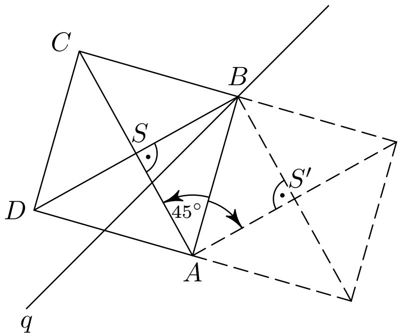
Naopak ke každému bodu S přímky o lze snadno sestrojit čtverec $ABCD$, jehož středem je bod S a jehož vrchol B leží na přímce q.

Závěr: Hledanou množinou bodů je dvojice vzájemně kolmých přímek o a o', které procházejí bodem P a svírají s přímkami p a q úhel $45°$ (obr. 2.4).

Jiné řešení. Využijeme vlastností obvodových úhlů, a to pro všechny tři výše popsané případy. I zde ukážeme řešení pouze pro případ z obr. 2.1.

Vzhledem k tomu, že platí $|\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle APB| = 90°$, je možno čtyřúhelníku $APBS$ opsat kružnici. Odtud na základě věty o obvodových úhlech dostáváme $|\sphericalangle APS| = |\sphericalangle ABS| = 45°$. Střed S uvažovaného čtyřúhelníku $ABCD$ leží tedy na ose úhlu APB.

Jiné řešení. Uvažujme libovolný bod B přímky p (obr. 2.5). Ke každému takovému bodu můžeme sestrojit čtverec $ABCD$ dvěma způsoby. Protože troj-



Obr. 2.5

úhelník ASB, resp. $AS'B$ je rovnoramenný pravoúhlý s úhlem 45° při vrcholu A, dostaneme střed S každého takového čtverce $ABCD$ složením otočení kolem středu A o úhel $\pm 45°$ a stejnolehlosti se středem A a koeficientem $\dfrac{|AS|}{|AB|} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Středy S všech uvažovaných čtverců $ABCD$ tedy vyplní dvě (navzájem kolmé) přímky $q' = AS$ a $q'' = AS'$, které dostaneme jako obraz přímky q v popsaných zobrazeních.

Návodná úloha:
Je dán čtverec $ABCD$. Úhlopříčka čtverce $KLMN$ je shodná se stranou čtverce $ABCD$ a vrcholy K a M leží na obvodě čtverce $ABCD$. Určete množinu všech vrcholů L všech takových čtverců $KLMN$. [19. MO, B–I–5]

3. *Dokažte, že pro každou trojici x, y, z kladných čísel platí nerovnost*

$$\sqrt{xyz}\left(\frac{2}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{2}{z+x}\right) \leqq \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}.$$

Zjistěte, kdy nastane rovnost.

Řešení. Podle pomocné úlohy 1 pro každá dvě kladná čísla a, b platí nerovnost $a+b \geqq 2\sqrt{ab}$ neboli $\dfrac{2}{a+b} \leqq \dfrac{1}{\sqrt{ab}}$, přičemž rovnost nastává, právě když $a = b$. Zapíšeme-li tuto nerovnost pro každý z odpovídajících sčítanců na levé straně dané nerovnosti, dostaneme tři nerovnosti

$$\frac{2}{x+y} \leqq \frac{1}{\sqrt{xy}}, \qquad \frac{2}{y+z} \leqq \frac{1}{\sqrt{yz}}, \qquad \frac{2}{z+x} \leqq \frac{1}{\sqrt{zx}}$$

a jejich sečtením nerovnost, kterou po vynásobení obou stran kladným číslem $\sqrt{xyz}$ převedeme na nerovnost ze zadání úlohy.

Rovnost nastává, jedině když platí $x = y = z$.

Pomocná úloha:
Dokažte nerovnost $a + b \geqq 2\sqrt{ab}$ pro libovolnou dvojici nezáporných čísel a, b. Zjistěte, kdy platí rovnost.

Doplňující úlohy:

1. Pro každou trojici x, y, z nezáporných čísel platí nerovnost
$$x + y + z \geqq \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}.$$
Dokažte a zjistěte, kdy platí rovnost.
2. Dokažte, že pro každou trojici x, y, z nezáporných čísel platí nerovnost
$$x(x - \sqrt{yz}) + y(y - \sqrt{zx}) + z(z - \sqrt{xy}) \geqq 0.$$
Zjistěte, kdy platí rovnost. [17. MO, A–II–2]

4. *Je dán čtyřstěn, v němž každé dvě protilehlé hrany jsou shodné. Uvnitř čtyřstěnu existuje bod M, který je stejně vzdálen od všech jeho stěn. Dokažte, že každá výška daného čtyřstěnu je rovna čtyřnásobku vzdálenosti bodu M od jeho stěn.*

Řešení. Uvažujme čtyřstěn $ABCD$, pro jehož délky hran podle zadání platí
$$|AB| = |CD| = p, \quad |BC| = |DA| = q, \quad |CA| = |BD| = r.$$

Stěny uvažovaného čtyřstěnu jsou tvořeny čtyřmi shodnými trojúhelníky (o stranách p, q, r), tudíž ze vzorce pro objem jehlanu plyne, že všechny čtyři tělesové výšky mají stejnou velikost v. Uvažujme dále uvnitř čtyřstěnu $ABCD$ bod M, který má od všech jeho stěn stejnou vzdálenost d. Vzhledem k tomu, že čtyřstěny $ABCM$, $ABDM$, $BCDM$ a $CADM$ mají shodné výšky z vrcholu M i odpovídající protilehlé stěny, mají i stejný objem, který se tudíž rovná čtvrtině objemu celého čtyřstěnu $ABCD$. Protože čtyřstěny $ABCD$ a $ABCM$ mají společnou stěnu ABC, musí platit $v = 4d$. Tím je důkaz ukončen.

Pomocné úlohy:

1. Zopakujte se žáky vzorec pro výpočet objemu V jehlanu o podstavě s obsahem P a výškou v ($V = \frac{1}{3}Pv$). Jeho užitím řešte následující úlohy:
2. Nechť T je těžiště stěny ABC daného čtyřstěnu $ABCD$. Dokažte, že čtyřstěny $ABDT$, $BCDT$ a $CADT$ mají stejný objem.
3. Je dán pravidelný čtyřstěn o hraně délky h. Dokažte, že všechny jeho vnitřní body mají týž součet vzdáleností od všech stěn daného čtyřstěnu. Vyjádřete tento součet pomocí délky h.

5. *V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic*

$$x + 2y + 3z = x^2 - z^2 + p,$$
$$y + 2z + 3x = y^2 - x^2 + p,$$
$$z + 2x + 3y = z^2 - y^2 + p,$$

kde p je reálný parametr. Proveďte diskusi o počtu řešení vzhledem k parametru p.

Řešení. Sečtením všech tří rovnic dostaneme

$$6(x + y + z) = 3p, \qquad \text{tj.} \qquad x + y + z = \frac{p}{2}.$$

Dosadíme-li tuto hodnotu do levých stran jednotlivých rovnic soustavy upravených podle vzoru

$$a + 2b + 3c = 2(a + b + c) + c - a,$$

obdržíme po úpravě následující soustavu rovnic (už bez parametru p):

$$z - x = x^2 - z^2, \qquad x - y = y^2 - x^2, \qquad y - z = z^2 - y^2.$$

Z první rovnice snadno zjistíme, že platí $z - x = 0$ nebo $z + x + 1 = 0$. Podobně z druhé, resp. třetí rovnice dostáváme $x - y = 0$ nebo $x + y + 1 = 0$, resp. $y - z = 0$ nebo $y + z + 1 = 0$. Protože daná soustava rovnic se nemění cyklickou permutací neznámých x, y, z, stačí rozlišit dva případy:

(i) $x = y = z$. Z výchozí soustavy pak snadno určíme, že jediným řešením je trojice

$$(x, y, z) = \left(\frac{p}{6}, \frac{p}{6}, \frac{p}{6}\right).$$

(ii) $x = y$ a $z = -x - 1$. Pro takové trojice neznámých je daná soustava ekvivalentní s jedinou rovnicí $2x = p + 2$ (o tom se snadno přesvědčíme dosazením), takže platí

$$x = y = 1 + \frac{p}{2} \qquad \text{a} \qquad z = -2 - \frac{p}{2}.$$

Permutováním trojice (x, y, z) v případě (i) žádné další řešení nedostaneme, v případě (ii) jsou výsledkem řešení

$$\left(1 + \frac{p}{2}, 1 + \frac{p}{2}, -2 - \frac{p}{2}\right), \ \left(-2 - \frac{p}{2}, 1 + \frac{p}{2}, 1 + \frac{p}{2}\right), \ \left(1 + \frac{p}{2}, -2 - \frac{p}{2}, 1 + \frac{p}{2}\right).$$

Řešení dané soustavy je jediné, právě když

$$\frac{p}{6} = 1 + \frac{p}{2} = -2 - \frac{p}{2}.$$

To nastane pouze pro $p = -3$. Pro každé jiné p má soustava právě čtyři řešení, neboť žádná dvě z čísel $\frac{1}{6}p$, $1 + \frac{1}{2}p$, $-2 - \frac{1}{2}p$ se pro $p \neq -3$ nerovnají.

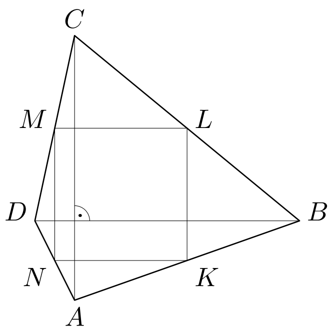
Pomocné úlohy:

1. Určete všechna reálná čísla a, pro něž má soustava rovnic
$$x^2 - 2y = y^2 - 2x = a$$
jediné řešení. [44. MO, C–II–2]
2. Určete všechna reálná čísla a, pro která existuje právě jedna dvojice (x, y) reálných čísel takových, že
$$x + \frac{1}{y} - \frac{y}{x} = y + \frac{1}{x} - \frac{x}{y} = a.$$
[44. MO, B–II–1]

6. *Jaký největší obsah může mít konvexní čtyřúhelník, v němž obě úsečky spojující středy protilehlých stran jsou shodné a mají danou délku d?*

Řešení. Označme $ABCD$ uvažovaný konvexní čtyřúhelník a K, L, M a N označme po řadě středy jeho stran AB, BC, CD a DA. Čtyřúhelník $KLMN$ je vždy rovnoběžník (někdy nazývaný Varignonův rovnoběžník čtyřúhelníku $ABCD$), neboť jeho strany KL, LM, MN, NK jsou po řadě středními příčkami v trojúhelnících ABC, BCD, CDA, DAB. Platí tedy $KL \parallel AC \parallel MN$ a $LM \parallel BD \parallel NK$. Mají-li obě úhlopříčky KM a LN v rovnoběžníku $KLMN$ tutéž délku d, je $KLMN$ pravoúhelník, v němž platí $KL \perp LM$, a je tudíž i $AC \perp BD$. Dokázali jsme, že úhlopříčky AC a BD čtyřúhelníku $ABCD$ jsou navzájem kolmé.

Obsah rovnoběžníku $KLMN$ je roven polovině obsahu čtyřúhelníku $ABCD$ (viz pomocnou úlohu 1), proto má čtyřúhelník $ABCD$ největší obsah, právě když má největší obsah příslušný pravoúhelník $KLMN$. Mezi všemi pravoúhelníky o dané úhlopříčce d má největší obsah čtverec, jehož obsah je $\frac{1}{2}d^2$. Největší možný obsah čtyřúhelníku $ABCD$ je tedy d^2. Takový obsah má každý uvažovaný čtyřúhelník, který má shodné a navzájem kolmé úhlopříčky délky $d\sqrt{2}$ (například ten na obr. 6.1).



Obr. 6.1

Pomocné úlohy:

1. Dokažte, že Varignonův rovnoběžník každého konvexního čtyřúhelníku má obsah rovný polovině obsahu celého čtyřúhelníku. [Dvojice trojúhelníků AKN, CML a BLK, DNM (obr. 6.1) mají dohromady obsah $\frac{1}{4}$ obsahu celého čtyřúhelníku (jak plyne z vlastností střední příčky trojúhelníku), takže celkem je obsah všech čtyř uvedených trojúhelníků roven polovině obsahu celého čtyřúhelníku.]
2. Ukažte, že mezi všemi pravoúhelníky o dané délce úhlopříčky má největší obsah čtverec.
3. Nechť kolmé průměty průsečíku úhlopříček daného konvexního čtyřúhelníku na jednotlivé jeho strany leží uvnitř těchto stran. Dokažte, že uvažované průměty leží na téže kružnici, právě když středy stran daného čtyřúhelníku leží na kružnici. [30. MO, B–II–2]