47. ročník Matematické olympiády

# Úlohy domácího kola kategorie C

**1.** *Pro libovolné trojciferné číslo určíme jeho zbytky při dělení čísly 2, 3, 4, …, 10 a získaných devět čísel pak sečteme. Zjistěte nejmenší možnou hodnotu takového součtu.*

Řešení. Označme $S(n)$ součet uvedených zbytků trojciferného čísla $n$. Vysvětlíme, proč $S(n) \geqq 3$.

- Pro liché $n$ je $S(n) \geqq 5$ (uvažte zbytky při dělení sudými čísly 2, 4, 6, 8, 10). Dále tedy nechť $n$ je sudé.
- Pokud $4 \nmid n$, tak $S(n) \geqq 4$ ($n$ dává při dělení čísly 4 a 8 zbytek aspoň 2). Nechť $n$ je dále dělitelné čtyřmi.
- Pokud $8 \nmid n$, tak $S(n) \geqq 4$ (zbytek 4 při dělení číslem 8). Proto nechť je dále $n$ dělitelné osmi.
- Pokud $3 \nmid n$, tak $S(n) \geqq 3$ ($n$ dává při dělení čísly 3, 6, 9 zbytek aspoň 1). Nechť je dále $n$ dělitelné osmi a třemi.
- Pokud $9 \nmid n$, tak $S(n) \geqq 3$ (zbytek aspoň 3 při dělení číslem 9). Nechť dále $8 \mid n$ a $9 \mid n$.
- Pokud $5 \nmid n$, tak $S(n) \geqq 3$ (zbytek aspoň 1 při dělení číslem 5 a zbytek aspoň 2 při dělení číslem 10).

Předpokládejme proto, že $5 \mid n$, $8 \mid n$ a $9 \mid n$. Pak přicházejí do úvahy už jen čísla 360 a 720, pro něž $S(360) = 3$ a $S(720) = 9$. Tím je nerovnost $S(n) \geqq 3$ dokázaná. Zároveň jsme zjistili, že $S(n) = 3$ např. pro $n = 360$. (Je také $S(840) = 3$.)

Jiné řešení. Uvažujme jen ten případ, kdy číslo $n$ není dělitelné nejvýše dvěma z čísel 2, 3, …, 10 (jinak $S(n) \geqq 3$). Pokud je tento „nedělitel“ jediný, je to nutně číslo 7 (musí to být prvočíslo, jehož dvojnásobek je větší než 10), takže $360 \mid n$. Pokud jsou takoví „nedělitelé“ dva, musí to být některá z dvojic 5 a 10, 8 a 9, 7 a 8, 7 a 9, 4 a 8. V každém případě $6 \mid n$, takže snadno ukážeme, že jeden z obou kladných zbytků je větší než 1, tedy $S(n) \geqq 3$.

Návodné úlohy:

1. Jaké jsou všechny možné součty zbytků čísla po dělení čísly 3, 6 a 9 ?
2. Najděte všechna čtyřmístná čísla, která po dělení čísly 4, 5, 6, 7 a 8 dávají zbytky

a) $1, 1, 1, 1, 1$; b) $3, 4, 5, 6, 7$; c) $1, 1, 1, 4, 1$.

Rozšiřující úloha:

Určete všechna pěticiferná čísla $A$ s následující vlastností: zapíšeme-li za sebou (zleva doprava) zbytky, které dává číslo $A$ po dělení čísly 2, 3, 4, 5 a 6, dostaneme opět původní číslo $A$. [11 311 (45–C–S–3)]

**2.** *Najděte všechny trojúhelníky $ABC$, pro které platí $a + v_a = b + v_b$ při obvyklém označení stran a výšek trojúhelníku.*

Řešení. Pro obsah $S$ trojúhelníku $ABC$ platí

$$S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2}. \tag{1}$$

Po dosazení do dané rovnosti dostaneme rovnost $a+\dfrac{2S}{a} = b+\dfrac{2S}{b}$. Jednoduchou úpravou odtud dále plyne $a - b = 2S\,\dfrac{a-b}{ab}$, neboli $(a-b)(ab-2S) = 0$. Je tedy buď $a = b$ (a tedy $v_a = v_b$), nebo $S = \dfrac{ab}{2}$ (tj. $v_a = b$, úhel $ACB$ je pravý a $v_b = a$). Snadno se přesvědčíme, že oba případy vyhovují.

Podmínce úlohy vyhovují všechny rovnoramenné trojúhelníky se základnou $AB$ a všechny pravoúhlé trojúhelníky s přeponou $AB$ (a žádné jiné).

Návodné úlohy:

1. Určete všechny trojúhelníky $ABC$, pro jejichž obsah $S$ platí $8S^2 = b^2c^2$.
2. Určete všechny trojúhelníky $ABC$, v nichž pro velikosti stran a výšek platí

$$\text{a) } a + \frac{1}{v_a} = c + \frac{1}{v_c}; \qquad \text{b) } a + \frac{1}{v_c} = c + \frac{1}{v_a}.$$

[a) $a = c$; b) $a = c$ nebo $S = \frac{1}{2}$.]

Rozšiřující úloha:

Je dáno přirozené číslo $n$. Určete všechny trojúhelníky $ABC$, pro něž platí

$$a^n + v_a^n = c^n + v_c^n.$$

[Jedině trojúhelníky, v nichž $a = c$, anebo jež mají pravý úhel při vrcholu $B$.]

**3.** *Sto dětí se rozdělilo do tří družstev A, B a C. Poté, co jedno dítě přestoupilo z A do B, jedno z B do C a jedno z C do A, se průměrná hmotnost dětí zvýšila v družstvu A o 120 g, v družstvu B o 130 g, zatímco v družstvu C se snížila o 240 g. Kolik dětí bylo v jednotlivých družstvech?*

Řešení. Označme $a$, $b$ a $c$ po řadě počty dětí v družstvech $A$, $B$ a $C$, dále nechť $\overline{a}$, $\overline{b}$ a $\overline{c}$ je po řadě průměrná hmotnost (v gramech) dětí v družstvech $A$, $B$ a $C$ před výměnou. Nakonec označme $a_1$, $b_1$ a $c_1$ po řadě hmotnost (v gramech) dítěte, které přestoupilo z $A$ do $B$, z $B$ do $C$ a z $C$ do $A$.

Celková hmotnost dětí v družstvu $A$ byla před výměnou $a \cdot \overline{a}$. Z podmínky v zadání sestavíme následující rovnici

$$\frac{a \cdot \overline{a} - a_1 + c_1}{a} = \overline{a} + 120.$$

Po jednoduché úpravě vyjde

$$-a_1 + c_1 = 120a.$$

Obdobně dostaneme i

$$-b_1 + a_1 = 130b \quad \text{a} \quad -c_1 + b_1 = -240c.$$

Sečtením těchto tří rovnic dostaneme (po vydělení deseti a dalších úpravách)

$$\begin{aligned} 12a + 13b &= 24c = 24(100 - a - b), \\ 36a + 37b &= 2\,400, \\ 36(a + b) + b &= 2\,400 = 36 \cdot 66 + 24. \end{aligned}$$

Z podmínky $0 < b < 100$ a poslední rovnice vyplývá, že mohou nastat jen tři následující případy:

a) $a + b = 66$, $b = 24$; b) $a + b = 65$, $b = 60$; c) $a + b = 64$, $b = 96$.

A zřejmě jen prvé dva vedou k přípustným řešením ($a > 0$). Ještě ověříme, zda obě získaná řešení skutečně vyhovují podmínkám úlohy. V případě a) máme $a = 42$, $b = 24$, $c = 34$; $c_1 - a_1 = 5\,040$ a $a_1 - b_1 = 3\,120$, zatímco v případě b) máme $a = 5$, $b = 60$, $c = 35$; $c_1 - a_1 = 600$ a $a_1 - b_1 = 7\,800$. Tyto výsledky zřejmě mohou odpovídat reálné situaci.

*Odpověď*: Počty dětí v družstvech $A$, $B$, $C$ byly po řadě buď 42, 24, 34, anebo 5, 60, 35.

Návodné úlohy:

1. V oboru přirozených čísel řešte rovnici

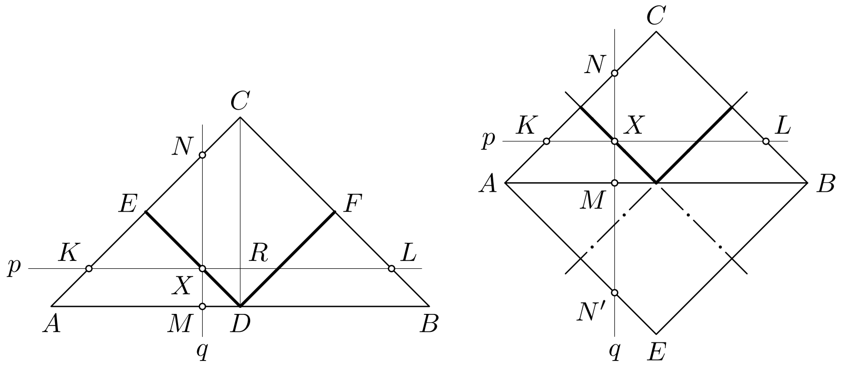
   a) $7x + 8y = 163$; b) $7x + 8y = 1\,998$.

   [a) $x = 21 - 8s$, $y = 2 + 7s$, $s \in \{0, 1, 2\}$; b) $x = 282 - 8s$, $y = 3 + 7s$, $s \in \{0, 1, \ldots, 35\}$.]
2. Průměrná výška skupiny děvčat je 165 cm. Když k nim přibyla Jana, jejíž výška je menší než 2 m, zvětšila se průměrná výška ve skupině na 171 cm. Kolik nejméně a kolik nejvýše děvčat může být po jejím příchodu ve skupině? [Nejméně 2, nejvýše 5.]

Rozšiřující úloha:

Opravte číslo na pravé straně jedné z rovnic $x + 2y = 43$, $2x + y = 50$, $x + y = 30$, $x - y = 4$ tak, aby opravená soustava měla řešení v oboru reálných čísel. Napište opravenou soustavu a její řešení. [$2x + y = 47$, $x = 17$, $y = 13$ (38–C–S–2)]

**4.** *Uvnitř daného pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku $ABC$ s přeponou $AB$ zvolíme libovolně bod $X$. Sestrojíme přímky $p$ a $q$, které procházejí bodem $X$ tak, že $p \parallel AB$ a $q \perp AB$. Trojúhelník $ABC$ vytíná na přímce $p$ úsečku $KL$, na přímce $q$ úsečku $MN$. Určete všechny body $X$, pro které platí $|KL| = 2 \cdot |MN|$.*




Obr. 1 Obr. 2

Řešení. Označme $R$ průsečík přímky $p$ s výškou $CD$ trojúhelníku $ABC$ (obr. 1) a $M$ průsečík přímky $q$ s přeponou $AB$. Předpokládejme, že bod $N$ leží na straně $AC$ (případ, kdy leží na straně $BC$, vyřešíme díky souměrnosti trojúhelníku $ABC$ podle osy $CD$ analogicky). Protože $|KL| = 2 \cdot |RC|$, požadovaná rovnost $|KL| = 2 \cdot |MN|$ platí, právě když $|RC| = |MN|$, tj. právě když $MR \parallel NC$, tj. právě když $MDRX$ je čtverec. Proto $DX$ je osa úhlu $ADC$ kolmá na $AC$, a tedy $X$ leží uvnitř úsečky $DE$, kde $E$ je střed strany $AC$, neboli uvnitř střední příčky trojúhelníku $ABC$ rovnoběžné s $BC$. Z uvedeného je jasné, že každý vnitřní bod této příčky vyhovuje zadání (krajní body $D$ a $E$ nevyhovují, protože nás zajímají jen body $X$ uvnitř trojúhelníku $ABC$). Obdobně pro bod $N$ na straně $BC$ dostaneme vnitřek střední příčky $DF$ (obr. 1).

*Odpověď*: Hledanou množinu tvoří všechny vnitřní body dvou středních příček trojúhelníku $ABC$, jež jsou rovnoběžné s jeho odvěsnami.

Jiné řešení. Trojúhelník $ABC$ doplňme na čtverec $AEBC$ (obr. 2). Hledáme ty body $X$ uvnitř trojúhelníku $ABC$, pro něž popsané přímky $p$ a $q$ vytínají na čtverci $AEBC$ dvě shodné úsečky $KL$ a $NN'$. Pak ale musí být trojúhelníky $KLC$ a $N'NA$ dva shodné rovnoramenné pravoúhlé trojúhelníky, to znamená, že přímky $p$ a $q$ jsou souměrně sdružené podle osy strany $AC$ čtverce, tj. bod $X$ leží na této ose. Podobně pro bod $N$ ležící na straně $BC$ dostaneme, že bod $X$ musí ležet na ose strany $BC$.

NÁVODNÉ ÚLOHY:

1. Nechť $S$ je střed strany $AB$ rovnostranného trojúhelníku $ABC$ se stranou $a = |BC| = 10\,\mathrm{cm}$. Označme $X$ takový bod trojúhelníku $ABC$, který je od přímek $CS$ a $AB$ vzdálený po řadě 2 cm a 3 cm. Veďme bodem $X$ rovnoběžky s $AB$ a $CS$. Ty protnou obvod trojúhelníku $ABC$ ve čtyřech bodech. Vypočítejte obsah čtyřúhelníku určeného těmito čtyřmi body. $[(15\sqrt{3} - 9)\,\mathrm{cm}^2]$
2. Je dán ostroúhlý trojúhelník $ABC$ a jeho libovolný bod $X$. Bodem $X$ veďme přímku kolmou na $AC$ a její průsečík se stranou $AC$ označme $M$. Její druhý průsečík s obvodem trojúhelníku $ABC$ označme $N$. Popište všechny ty body $X$, pro něž platí $|MX| = |NX|$. [Sjednocení úseček $AU$ a $CU$, kde $U$ je střed výšky z vrcholu $B$ na stranu $AC$.]

**5.** *Řešte soustavu*

$$\begin{aligned} 7[x] + 2y &= 117{,}4,\\ 5x + 2[y] &= 91{,}9, \end{aligned}$$

*kde $[a]$ je tzv. celá část reálného čísla a, tj. celé číslo, pro které platí $[a] \leqq a < [a] + 1$. Například $[3{,}7] = 3$ a $[-3{,}7] = -4$.*

ŘEŠENÍ. Nechť $x - [x] = x_0$ a $y - [y] = y_0$, kde $x_0$, $y_0$ $(0 \leqq x_0, y_0 < 1)$ jsou tzv. zlomkové části čísel $x$, $y$. Daná soustava tak přejde na tvar

$$\begin{aligned} 7[x] + 2[y] &= 117{,}4 - 2y_0,\\ 5[x] + 2[y] &= 91{,}9 - 5x_0. \end{aligned}$$

V obou rovnicích musí být na pravých stranách celá čísla, proto $y_0$ může nabývat pouze hodnot 0,2 nebo 0,7. Rozeberme oba tyto případy:

a) Nechť $y_0 = 0{,}2$, tedy $[y] = \dfrac{117 - 7[x]}{2}$.
Odečtením rovnic dostáváme $2[x] = 25{,}1 + 5x_0$. Protože $0 \leqq 5x_0 < 5$, může $[x]$ nabývat pouze hodnot 13, 14 a 15. Aby bylo $[y]$ celé, musí být $[x]$ navíc liché číslo. Potom dostáváme

| $[x]$ | $x_0$ | $[y]$ | $x$ | $y$ |
|---|---|---|---|---|
| 13 | 0,18 | 13 | 13,18 | 13,2 |
| 15 | 0,98 | 6 | 15,98 | 6,2 |

b) Nechť $y_0 = 0{,}7$, tedy $[y] = \dfrac{116 - 7[x]}{2}$.
Odečtením rovnic dostáváme $2[x] = 24{,}1 + 5x_0$. Protože $0 \leqq 5x_0 < 5$, může $[x]$ nabývat pouze hodnot 13 a 14. Aby bylo $[y]$ celé, musí být $[x]$ navíc sudé číslo. Potom dostáváme

| $[x]$ | $x_0$ | $[y]$ | $x$ | $y$ |
|---|---|---|---|---|
| 14 | 0,78 | 9 | 14,78 | 9,7 |

Soustava má tři řešení: $x = 13{,}18$, $y = 13{,}2$; $x = 15{,}98$, $y = 6{,}2$ a $x = 14{,}78$, $y = 9{,}7$.

Jiné řešení. Z první rovnice dané soustavy plyne, že zlomková část čísla $y$ je buď 0,2, nebo 0,7. Podobně z druhé rovnice usoudíme, že zlomková část čísla $x$ je rovna buď číslu 0,18 ($= 0{,}9 : 5$), nebo číslu $0{,}18 + 0{,}2k$ pro vhodné $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. Jedna (z desíti) možností tedy je, že $x = [x] + 0{,}18$ a $y = [y] + 0{,}2$. Tehdy po dosazení dostaneme pro (celočíselné) neznámé $[x]$, $[y]$ soustavu $7[x]+2[y] = 117$, $5[x]+2[y] = 91$, která má jediné řešení $[x] = [y] = 13$. Podobně se posoudí ostatních devět možností, v sedmi z nich vyjde pro neznámé $[x]$, $[y]$ soustava bez celočíselných řešení. Celou diskusi lze poněkud zkrátit, a to tak, že nejprve obecně dosadíme $x = [x] + 0{,}18 + 0{,}2k$ a $y = [y] + 0{,}2 + 0{,}5j$ (kde $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ a $j \in \{0, 1\}$), vypočteme $[x] = 13 + \frac{1}{2}(k - j)$ a $[y] = 13 + j - 2k + \frac{1}{4}(k + j)$, odkud už snadno určíme vyhovující dvojice $(k, j)$: $(0, 0)$, $(4, 0)$ a $(3, 1)$.

Návodné úlohy:

1. Načrtněte grafy funkcí (na intervalu $\langle -10, 10\rangle$)

$$y = [x], \quad y = [2x], \quad y = [x - 6{,}3], \quad y = x + [x], \quad y = x \cdot [x].$$

2. V oboru kladných reálných čísel řešte rovnici

$$\text{a) } x + [x] = 68{,}5; \qquad \text{b) } x \cdot [x] = 68{,}5;$$
$$\text{c) } x + [x] = 97; \qquad \text{d) } x \cdot [x] = 97.$$

[a) $x = 34{,}5$; b) $x = 8{,}562\,5$ — nejprve vysvětlete, proč $8 < x < 9$; c) a d) nemá řešení.]

Rozšiřující úlohy:

1. Najděte aspoň jednu dvojici celých čísel $a$, $b$ tak, aby pro každé celé číslo $x$ platilo

$$\left[\frac{x + a}{5}\right] + \left[\frac{x + b}{5}\right] = \left[\frac{2x}{5}\right].$$

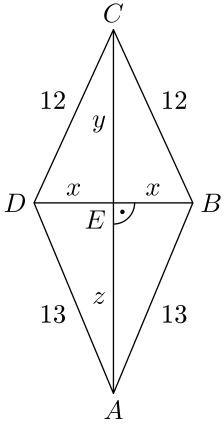
[Např. $a = 0$, $b = 2$ (40–B–S–2).]

2. Je funkce $y = x^2 - [x^2]$ periodická? Pokud ano, určete její periodu. [Není.]

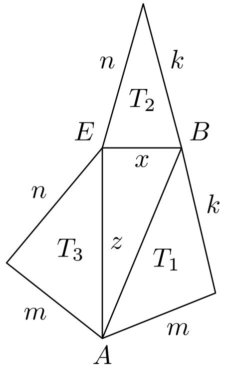
**6.** *Sestrojte deltoid se stranami 12 cm a 13 cm, který je svými úhlopříčkami rozdělen na čtyři trojúhelníky, jež jsou čtyřmi stěnami nějakého čtyřstěnu. Zhotovte papírový model tohoto čtyřstěnu.*

Řešení. Na obr. 3 je znázorněn výchozí deltoid, na obr. 4 síť odpovídajícího čtyřstěnu. Z pravoúhlých trojúhelníků plynou pro úseky $x$, $y$ a $z$ úhlopříček deltoidu nerovnosti

$$12 > x, \qquad 12 > y, \qquad 13 > z > y. \qquad (*)$$



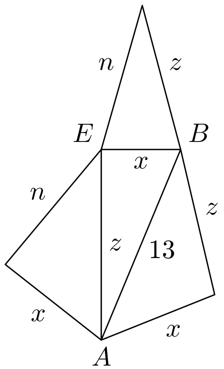

Obr. 3



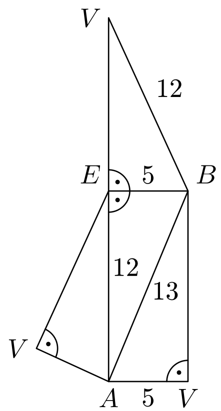

Obr. 4

Nutně tedy musí být trojúhelník $T_1$ shodný s trojúhelníkem $AED$ ($AB$ a $AD$ jsou nejdelší ze všech stran uvažovaných trojúhelníků). Mohou nastat dva případy:

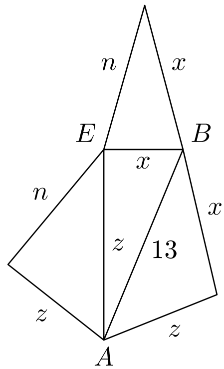
a) Nechť $k = z$ a $m = x$ (obr. 5). V tom případě se musí shodovat trojúhelníky se stranami $x$, $y$, 12 a $x$, $z$, $n$. Protože $y < z$, musí být $n = y$ a $z = 12$. Potom $x = \sqrt{13^2 - z^2} = 5$.




Obr. 5




Obr. 6




Obr. 7

Síť pak bude mít tvar uvedený na obr. 6 a kýžený čtyřstěn $AEBV$ zřejmě existuje: dostaneme ho tak, že trojúhelník $AEV$ otočíme kolem přímky $AE$ o $90^\circ$ (tělesová výška z vrcholu $V$ bude ležet ve stěně $AVE$).

Konstrukce odpovídajícího deltoidu je zřejmá, např.

1. $\triangle ABE$; podle věty $sss$: $|AB| = 13\,\mathrm{cm}$, $|BE| = 5\,\mathrm{cm}$ a $|EA| = 12\,\mathrm{cm}$.
2. $\triangle EBC$; podle věty $Ssu$: $|\sphericalangle CEB| = 90^\circ$, $|BC| = 12\,\mathrm{cm}$ a $C \notin \overrightarrow{EA}$.
3. $D$; $E$ je střed úsečky $DB$.

b) Nechť $k = x$ a $m = z$ (obr. 7). Pak se ale musí rovnoramenné trojúhelníky o stranách $z$, $z$, $n$ a $x$, $x$, $n$ shodovat s pravoúhlým trojúhelníkem s odvěsnami $x$, $y$ a přeponou 12. Odtud plyne $x = y = z$ a $m = n = 12$, což je ve sporu s nerovnostmi $(*)$.

Úloha má tedy jediné řešení popsané v části a).

Návodné úlohy:

1. Na nitce je zavěšeno kmitající závaží. Šířka rozkmitu je 56 cm, výškový rozdíl mezi nejnižší a nejvyšší polohou závaží je 8 cm. Vypočítejte délku $r$ závěsu. [$r = 53\,\mathrm{cm}$]
2. Řešte původně zadanou úlohu (pro deltoid) pro a) čtverec se stranou 12 cm, b) obdélník se stranami 12 cm a 13 cm, c) kosočtverec se stranou 12 cm, d) kosodélník se stranami 12 cm a 13 cm.

Rozšiřující úlohy:

1. Jeník rozřezal konvexní papírový mnohostěn na jednotlivé stěny (podél hran) a poslal je Frantíkovi. Frantík opět z těchto stěn slepil konvexní mnohostěn. Je možné, že Janův a Františkův mnohostěn nebyly shodné? [Uvažte např. těleso, které dostanete spojením dvou shodných jehlanů s pravidelnou podstavou, které však nejsou pravidelné (kolmý průmět jejich vrcholu nepadne do středu podstavy).]
2. Nad stranami ostroúhlého trojúhelníku $ABC$ jsou zvnějšku sestrojeny půlkružnice. Označme po řadě $K$, $L$, $M$ průsečíky prodloužených výšek trojúhelníku z vrcholů $A$, $B$, $C$ s těmito půlkružnicemi. Dokažte, že obrazec $AMBKCL$ tvoří plášť čtyřstěnu (trojbokého jehlanu s podstavou $ABC$). [46–B–I–6]