1. Najděte všechny trojúhelníky ABC, pro které platí rovnost

$$|BC| \cdot |AX| = |AC| \cdot |BY|,$$

kde bod X je průsečíkem osy úhlu BAC se stranou BC a bod Y průsečíkem osy úhlu ABC se stranou AC. (P. Černek)

Řešení: Zkoumanou rovnost přepíšeme do tvaru $|BC| : |BY| = |AC| : |AX|$ a oba poměry vyjádříme pomocí sinových vět pro trojúhelníky BCY a ACX (ve kterých při obvyklém označení vnitřních úhlů trojúhelníku ABC zřejmě platí $|\angle BYC| = \alpha + \frac{1}{2}\beta$ a $|\angle AXC| = \beta + \frac{1}{2}\alpha$):

$$\frac{|BC|}{|BY|} = \frac{\sin(\alpha + \frac{1}{2}\beta)}{\sin\gamma} \quad \text{a} \quad \frac{|AC|}{|AX|} = \frac{\sin(\beta + \frac{1}{2}\alpha)}{\sin\gamma}.$$

Hledáme proto právě ty trojúhelníky, pro které $\sin(\alpha + \frac{1}{2}\beta) = \sin(\beta + \frac{1}{2}\alpha)$. Protože oba argumenty leží mezi $0°$ a $180°$, rovnost jejich sinů nastane, jen pokud $\alpha + \frac{1}{2}\beta = \beta + \frac{1}{2}\alpha$, nebo $(\alpha + \frac{1}{2}\beta) + (\beta + \frac{1}{2}\alpha) = 180°$. První podmínka znamená $\alpha = \beta$, druhá $\alpha + \beta = 120°$, neboli $\gamma = 60°$.

Malá obměna první části: Srovnáme-li zkoumanou rovnost s obecně platnou rovností $|BC| \cdot |AP| = |AC| \cdot |BQ|$, kde AP a BQ jsou výšky daného trojúhelníku, dostaneme ekvivalentní podmínku ve tvaru $|AP| : |AX| = |BQ| : |BY|$. Z pravoúhlých trojúhelníků APX a BQY tak opět vyjde rovnost $\sin(\alpha+\frac{1}{2}\beta) = \sin(\beta+\frac{1}{2}\alpha)$.

Odpověď: Hledanými jsou právě ty trojúhelníky, pro které platí $|AC| = |BC|$ nebo $|\angle ACB| = 60°$.

2. V jistém jazyku jsou pouze dva znaky A a B. Přípustná jsou v něm jen taková slova, v nichž nestojí vedle sebe více než dva stejné znaky. Dokažte, že počty p_n všech přípustných slov délky n lze určit pomocí rovností $p_1 = 2$, $p_2 = 4$ a $p_{k+2} = p_{k+1} + p_k$ pro každé přirozené číslo k. (J. Zhouf)

Řešení: Rovnosti $p_1 = 2$ a $p_2 = 4$ jsou zřejmé, neboť u slov délek 1 a 2 žádné omezení na sousední znaky vlastně není. Pro pevné $k \geq 1$ rozdělíme všechna přípustná slova $X_1X_2\dots X_{k+2}$ délky $k+2$ do čtyř skupin podle poslední dvojice znaků $X_{k+1}X_{k+2}$:

a) Je-li $X_{k+1}X_{k+2} = AA$, pak nutně $X_k = B$, takže $X_1X_2\dots X_k$ je některé přípustné slovo délky k končící znakem B.

b) Je-li $X_{k+1}X_{k+2} = BB$, pak nutně $X_k = A$, takže $X_1X_2\dots X_k$ je některé přípustné slovo délky k končící znakem A.

c) Je-li $X_{k+1}X_{k+2} = AB$, pak $X_1X_2\dots X_{k+1}$ je některé přípustné slovo délky $k+1$ končící znakem A.

d) Je-li $X_{k+1}X_{k+2} = BA$, pak $X_1X_2\dots X_{k+1}$ je některé přípustné slovo délky $k+1$ končící znakem B.

V prvních dvou skupinách je dohromady právě p_k slov, neboť každé přípustné slovo délky k se v popisech uvedených v bodech a) a b) objeví právě jednou. Podobně se pomocí všech přípustných slov délky $k+1$ usoudí, že v posledních dvou skupinách je dohromady právě p_{k+1} slov. Tím je rovnost $p_{k+2} = p_{k+1} + p_k$ dokázána.

3. Dokažte, že všechna řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} ux + vy &= x^2 + xy, \\ vx + uy &= y^2 + xy, \\ xy + uv &= u^2 + v^2 \end{aligned}$$

v oboru nenulových reálných čísel jsou tvaru $x = y = u = v$. (J. Šimša)

Řešení: Sečtením prvních dvou rovnic dostaneme

$$(u + v)(x + y) = (x + y)^2 \,,$$

odkud plyne $x + y = 0$ nebo $x + y = u + v$.

V prvním případě po dosazení $y = -x$ do první rovnice dostaneme $x(u - v) = 0$, odkud $u = v$ (neboť $x \neq 0$ dle zadání); po dosazení $y = -x$ a $u = v$ do třetí rovnice obdržíme po snadné úpravě rovnici $x^2 + u^2 = 0$, která v našem oboru nemá řešení.

Ve druhém případě (kdy $x + y = u + v$) je pravá strana první rovnice rovna $x(x + y) = x(u + v)$, to jest $ux + vx$; porovnáním s levou stranou $ux + vy$ proto (s ohledem na $v \neq 0$) vychází $x = y$, takže v tomto případě $x = y = \frac{1}{2}(u + v)$; dosadíme-li to do třetí rovnice

$$\left(\frac{u + v}{2}\right)^2 + uv = u^2 + v^2,$$

vyjde po úpravě $(u - v)^2 = 0$, odkud $u = v$, tedy $x = y = u = v$. Tím je celý důkaz hotov.

POZNÁMKA: Ani v oboru *všech* reálných čísel (včetně nuly) jiná řešení než $x = {}$ $= y = u = v$ neexistují. Dokážeme to, když předchozí postup doplníme o rozbor dvou situací:

a) $x + y = 0$ a $x = 0$. Zřejmě $y = 0$; z třetí rovnice soustavy, která je nyní tvaru $uv = u^2 + v^2$, již plyne $u = v = 0$.

b) $x + y = u + v$ a $v = 0$. Zřejmě $x + y = u$ a třetí rovnice soustavy je nyní tvaru $xy = u^2$, takže $xy = (x + y)^2$, odkud již plyne $x = y = 0$, a proto i $u = 0$.