47. ročník matematické olympiády

Úlohy školní – klauzurní části I. kola kategorie B

1. Určete všechny trojice (a, b, c) reálných čísel, pro které platí

$$a + b + c = 1,$$
$$ab + bc + ca = abc.$$

2. Nechť obě úsečky spojující středy protilehlých stran konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ mají stejnou délku. Dokažte, že úhlopříčky AC a BD jsou navzájem kolmé a že platí rovnost

$$|AB|^2 + |CD|^2 = |BC|^2 + |DA|^2.$$

3. Najděte všechny čtvercové tabulky 3×3 přirozených čísel, v nichž je součin všech čísel v každém řádku, v každém sloupci i na obou úhlopříčkách stejný a pro něž platí, že součet čtyř čísel v jejich rohových polích je jednociferné číslo.

Školní – klauzurní část I. kola kategorie B se koná

v úterý 27. ledna 1998

tak, aby začala dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. Druhou rovnici upravíme na tvar $(1-c)ab+(a+b)c=0$. Podle první rovnice je však $a+b=1-c$, takže odtud dostáváme podmínku $(1-c)(ab+c)=0$. Protože původní soustava byla symetrická vzhledem k neznámým a, b, c, pokusíme se ještě upravit činitel $ab+c$. Pomocí první rovnice tak dostaneme

$$ab+c=ab+(1-a-b)=a(b-1)+(1-b)=(1-a)(1-b),$$

takže

$$(1-c)(ab+c)=(1-a)(1-b)(1-c)=0.$$

Odtud plyne, že některé z čísel a, b, c je nutně rovno jedné, ostatní dvě z nich jsou pak (dle rovnosti $a+b+c=1$) čísla navzájem opačná. Trojice (a,b,c) má tedy jeden z tvarů

$$(1,k,-k),\ (k,1,-k),\ (k,-k,1),$$

kde k je vhodné číslo. Dosazením se snadno přesvědčíme, že jsou to skutečně řešení, a to pro libovolné reálné číslo k.

Řešení 2. Použijeme standardní postup pro řešení soustav rovnic. Z první rovnice vyjádříme například „neznámou" $c=1-a-b$ a dosadíme do rovnice druhé, kterou pak budeme řešit vzhledem k „neznámé" b (považujíce a za „parametr"). Dostaneme tak po rutinních úpravách kvadratickou rovnici

$$(a-1)b^2+(a^2-2a+1)b+(a-a^2)=0.$$

Její koeficienty, jak snadno vidíme, mají společného činitele $a-1$, takže rovnici před řešením ještě upravíme:

$$(a-1)\left[b^2+(a-1)b-a\right]=0.$$

Protože kořeny trojčlenu v hranatých závorkách jsou $b_1=1$ a $b_2=-a$, musí nastat jeden z případů $a=1$, $b=1$, nebo $b=-a$. Závěr je stejný jako u prvního řešení.

Řešení 3. V obou rovnicích vystupují výrazy, které, jak víme, souvisejí s koeficienty mnohočlenu $P(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$. Tak zjistíme, že jsou-li obě rovnice splněny, má mnohočlen $P(x)$ tvar x^3-x^2+px-p, kde $p=abc$. Tehdy platí $P(1)=1-1+p-p=0$, takže číslo 1 musí být jedním z kořenů a, b, c mnohočlenu $P(x)$. Závěr je stejný jako u prvního řešení.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za nalezení (podložené výpočtem a neúplnou diskusí, ne uhodnutí) jednoho nebo dvou typů řešení udělte 4 body, za jejich uhodnutí (třeba i všech tří typů) dejte 2 body.

2. Označme K, L, M, N po řadě středy stran AB, BC, CD, DA uvažovaného konvexního čtyřúhelníku $ABCD$. Čtyřúhelník $KLMN$ je rovnoběžník, neboť každá z jeho stran je střední příčkou v jednom ze čtyř trojúhelníků ABC, BCD, CDA a DAB, na něž jednotlivé úhlopříčky daný čtyřúhelník rozdělí, takže $KL \parallel AC \parallel MN$ a $LM \parallel BD \parallel MK$ (bylo to využito i v úloze B–I–6). Mají-li navíc jeho úhlopříčky KM a LN tutéž délku, je

$KLMN$ pravoúhelník, a proto jsou úhlopříčky AC a BD daného konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ navzájem kolmé.

Označme P průsečík úhlopříček AC a BD čtyřúhelníku $ABCD$. Užijeme-li Pythagorovu větu postupně na pravoúhlé trojúhelníky ABP, BCP, CDP a DAP, dostaneme

$$\begin{aligned}|PA|^2 + |PB|^2 &= |AB|^2,\\ |PB|^2 + |PC|^2 &= |BC|^2,\\ |PC|^2 + |PD|^2 &= |CD|^2,\\ |PD|^2 + |PA|^2 &= |DA|^2.\end{aligned}$$

Součtem první a třetí, resp. druhé a čtvrté rovnosti vyjde

$$|AB|^2 + |CD|^2 = |PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + |PD|^2 = |BC|^2 + |DA|^2,$$

což jsme měli dokázat.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za důkaz kolmosti udělte 3 body, za důkaz uvedené rovnosti udělte 3 body, i když kolmost úhlopříček je pouze předpokládána (a ne dokázána).

3. Označme a, b, c, d jednomístná čísla v rohových polích hledané tabulky (obr. 1) a e číslo v jejím středovém poli. Vzhledem k souměrnosti (překlopením podle jedné z úhlopříček nebo středního sloupce či řádku se uvažované vlastnosti tabulky nezmění) můžeme předpokládat, že je $a \leqq d$, $b \leqq c$ a $a + d \leqq b + c$, a protože má být $a+b+c+d \leqq 9$, bude za uvedených předpokladů $a+d \leqq 4$ a $b + c \leqq 5$. Z rovnosti $aed = bec$ plyne $ad = bc$, takže stačí prozkoumat následujících pět možností:

a		b
	e	
c		d

Obr. 1

$$\begin{array}{c|ccccc} a & 1 & 1 & 1 & 2 & 2\\ d & 1 & 2 & 3 & 2 & 2\\ b & 1 & 1 & 1 & 1 & 2\\ c & 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \end{array}$$

V každém z těchto pěti případů můžeme pomocí „prostředního" čísla e stejnou metodou vyjádřit ostatní čísla tabulky, a to tak, že využijeme rovnosti součinů čísel v obou úhlopříčkách, obou krajních řádcích a obou krajních sloupcích. Tabulky pak vypadají takto:

1	e	1
e	e	e
1	e	1

1	$2e$	1
e	e	e
2	$\frac{1}{2}e$	2

1	$3e$	1
e	e	e
3	$\frac{1}{3}e$	3

2	$2e$	1
$\frac{1}{2}e$	e	$2e$
4	$\frac{1}{2}e$	2

2	e	2
e	e	e
2	e	2

Porovnáme-li nyní zmíněné součiny se součinem čísel v druhém řádku (či v druhém sloupci), dostaneme v každém z uvedených případů jedinou rovnici

$$e^3 = (ad)e, \quad \text{kde postupně } ad = 1, 2, 3, 4, 4.$$

Tato rovnice má v přirozených číslech řešení pouze pro $ad \in \{1, 4\}$ a tomu odpovídají tři tabulky na obr. 2. Z poslední tabulky dostaneme zmíněnými souměrnostmi ještě tři další, ale jak snadno zjistíme, vznikne každá z nich otáčením uvedené tabulky o $90°$.

1	1	1
1	1	1
1	1	1

2	2	2
2	2	2
2	2	2

2	4	1
1	2	4
4	1	2

Obr. 2

Za správné řešení udělte 6 bodů, z toho po 1 bodu za nalezení prvních dvou tabulek, 2 body za nalezení třetího typu tabulky, zbývající 1 až 2 body podle úplnosti úvah, kterými je vyloučena existence dalších řešení. Za opomenutí možných souměrných řešení body nestrhávejte.