A47, krajské kolo

1. Číslo $1\,997^{3^n}+1$ je dělitelné číslem 3^{n+3} pro každé přirozené číslo n. Dokažte.

Řešení: Tvrzení dokážeme indukcí podle čísla n. Můžeme začít od hodnoty $n=0$: číslo 1997^{3^0} je skutečně násobkem čísla 3^3 $(1998 = 27\cdot 74)$. Platí-li podle indukčního předpokladu rovnost 1997^{3} $+\,1 = 3^{n+3}k_n$ pro vhodné přirozené číslo k_n, dostaneme ze vzorce $A^3+B^3=(A+B)^3-3AB(A+B)$ hodnoty $A = 1997^{3^n}$ a $B=1$ následující vyjádření:

$$1997^{3^{n+1}}+1=\left(3^{n+3}k_n\right)^3-3\cdot 1997^{3^n}\cdot\left(3^{n+3}k_n\right)=3^{n+4}\left(3^{2n+5}k_n^3-1997^{3^n}k_n\right).$$

Tím je důkaz hotov.

Dodejme, že při druhém indukčním kroku bylo rovněž možné využít rozklad

$$x^{3^{n+1}}+1=(x^{3^n})^3+1^3=(x^{3^n}+1)(x^{2\cdot 3^n}-x^{3^n}+1)$$

a vysvětlit, proč pro $x=1997$ je druhý činitel dělitelný třemi: čísla $1997^{2\cdot 3^n}$ a 1997^{3^n} totiž při dělení tř dávají po řadě zbytky 1 a 2.

2. V jedné řadě je postaveno n sloupků dámových kamenů tak, že mezi každými dvěma sloupky st výšky se nachází sloupek vyšší. (Všechny kameny mají shodnou výšku, některé sloupky mohou být tvoř i jedním kamenem.) Nejvyšší sloupek obsahuje k kamenů. Pro dané k určete největší možnou hodnotu

Řešení: Výšku sloupku budeme udávat počtem kamenů, ze kterých je sloupek vytvořen. Je-li v uvažo řadě x sloupků téže výšky v, musí v každé z $x-1$ mezer mezi nimi stát nějaký sloupek výšky alespoň v takže *sloupků výšky v je nejvýše o 1 více než všech sloupků výšek alespoň $v+1$*. Využijeme-li tento pozna postupně pro $v=k$, $k-1$, $k-2$, …, zjistíme, že sloupek maximální výšky k je jediný, sloupky výšky k jsou nejvýše 2 (o 1 více než 1), sloupky výšky $k-2$ nejvýše 4 (o 1 více než $1+2$), sloupků výšky $k-$ nejvýše 8 (o 1 více než $1+2+4$), … Tak se (formálně indukcí) ověří, že sloupků výšky $k-j$ je nej 2^j (o 1 více než $1+2+\cdots+2^{j-1}$). Sečtením pro $j=0,1,\ldots,k-1$ dostaneme odhad pro počet n v sloupků uvažované řady:

$$n\le 1+2+4+\cdots+2^{k-1}=2^k-1\,.$$

Hodnota $n=2^k-1$ je možná, konstrukce příslušné řady je nasnadě: nejdříve postavíme 1 sloupek výšk pak 2 sloupky výšky $k-1$, pak 4 sloupky výšky $k-2$ atd. až na konec 2^{k-1} sloupků výšky 1, a to vždy všech mezer mezi již postavené kameny a na oba kraje řady. Lze to vyjádřit schématem

$$(k)\to(k-1,k,k-1)\to(k-2,k-1,k-2,k,k-2,k-1,k-2)\to\ldots\to(1,2,1,\ldots,1,2,1).$$

Jiné řešení: Indukcí vzhledem k číslu k ukážeme, že hledaná největší možná hodnota n, kte označíme n_k, existuje a že platí rovnost $n_{k+1}=2n_k+1$ pro každé $k\ge 1$. Protože sloupek maxim výšky je v každé uvažované řadě zřejmě jediný, platí především $n_1=1$. Předpokládejme nyní, že číslo existuje a uvažujme o libovolné řadě dané vlastnosti, v níž má (jediný) nejvyšší sloupek výšku $k+1$ kam Tento sloupek rozděluje řadu na dvě části, které rovněž mají zkoumanou vlastnost, všechny sloupky v n však obsahují nejvýše k kamenů. Proto na každou stranu od sloupku o $k+1$ kamenech stojí nejvýše n_k slou (přesněji: nejvýše $n_{k'}$ sloupků, kde k' je druhý největší počet kamenů v jednom sloupku celé uvažované ř zřejmě však $n_{k'}\le n_k$, kdykoliv $k'\le k$). Proto číslo n_{k+1} existuje a platí odhad $n_{k+1}\le n_k+n_k+1$. druhé straně, vezmeme-li dvě stejné řady zkoumané vlastnosti, a to právě o n_k sloupcích (z nichž nejv obsahuje k kamenů) a postavíme mezi ně sloupek o $k+1$ kamenech, dostaneme řadu, která potvrzuje od $n_{k+1}\ge 2n_k+1$. Rovnost $n_{k+1}=2n_k+1$ je tak dokázána.

Z rovností $n_1=1$ a $n_{k+1}=2n_k+1$ se už snadno uhodne a indukcí ověří vzorec $n_k=2^k-1$.

Do pokynů pro bodování: Řešení typu "abych umístil do řady co nejvíce sloupků, budu ji sestavo takto … " bez vysvětlení, proč řada o větším počtu sloupků neexistuje, oceňte nejvýše 4 body. Za dů nerovnosti $n\le 2^k-1$ (bez vysvětlení, že rovnost je možná), udělte 5 bodů.

3. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x^2 - yz &= a\,,\\ y^2 - zx &= a-1\,,\\ z^2 - xy &= a+1 \end{aligned}$$

s reálným parametrem a. Proveďte diskusi o počtu řešení.

Řešení: Odečteme-li od první rovnice rovnici druhou a pak od třetí rovnice rovnici první, dostan
rovnosti

$$(x-y)(x+y+z) = 1 \quad \text{a} \quad (z-x)(x+y+z) = 1\,.$$

Plyne z nich, že čísla $x-y$ a $z-x$ jsou nutně různá od nuly a obě se rovnají číslu $s = (x+y+z$
Vyjádření $y = x - s$ a $z = x + s$ dosadíme do původní soustavy:

$$(*)\qquad \begin{aligned} x^2 - (x+s)(x-s) &= a\,,\\ (x-s)^2 - x(x+s) &= a-1\,,\\ (x+s)^2 - x(x-s) &= a+1\,. \end{aligned}$$

Snadno zjistíme, že tato soustava je ekvivalentní s dvojicí rovnic $s^2 = a$ a $3xs = 1$, z níž jednak p
podmínka řešitelnosti $a > 0$ (neboť $s \neq 0$), jednak vyjádření $s = \pm\sqrt{a}$ a $x = \frac{1}{3s} = \pm\frac{1}{3\sqrt{a}}$, takže $y = x -$
$= \pm\frac{1-3a}{3\sqrt{a}}$ a $z = x + s = \pm\frac{1+3a}{3\sqrt{a}}$ (ve všech vzorcích platí vždy stejné znaménko). Protože soustava $(*)$
řešena ekvivalentními úpravami, není třeba provádět zkoušku.

Odpověď: Pro $a \le 0$ soustava nemá žádné řešení, pro $a > 0$ existují právě dvě řešení (x, y, z), a to tro

$$\left(\frac{1}{3\sqrt{a}}, \frac{1-3a}{3\sqrt{a}}, \frac{1+3a}{3\sqrt{a}}\right) \quad \text{a} \quad \left(\frac{-1}{3\sqrt{a}}, \frac{-1+3a}{3\sqrt{a}}, \frac{-1-3a}{3\sqrt{a}}\right).$$

Jiné řešení: Členy na levých stranách rovnic eliminujeme tak, že sečteme y-násobek první rovnic
z-násobkem rovnice druhé a x-násobkem rovnice třetí. Dostaneme tak lineární rovnici $0 = ay + (a-1)$
$+ (a+1)x$. Podobně sečtením z-násobku první rovnice s x-násobkem rovnice druhé a y-násobkem rov
třetí dostaneme $0 = az + (a-1)x + (a+1)y$. Ze získaných rovnic

$$(a+1)x + ay + (a-1)z = 0,\ (a-1)x + (a+1)y + az = 0$$

eliminujeme nejprve proměnnou z (odečtením $(a-1)$-násobku druhé rovnice od a-násobku rovnice prv
výsledkem je vyjádření $y = (1-3a)x$; poté podobnou eliminací proměnné y dospějeme k rovnosti $z = ($
$+ 3a)x$. Dosadíme-li tato vyjádření y a z do původních rovnic, dostaneme soustavu

$$9a^2x^2 = a,\ 9a(a+1)x^2 = a+1,\ 9a(a-1)x^2 = a-1.$$

Ta je ekvivalentní (bez ohledu na hodnotu parametru a) s jedinou rovnicí $9ax^2 = 1$. Tak dostáv
podmínku řešitelnosti $a > 0$ a vzorce pro obě řešení

$$x = \pm\frac{1}{3\sqrt{a}},\ y = (1-3a)x = \pm\frac{1-3a}{3\sqrt{a}},\ z = (1+3a)x = \pm\frac{1+3a}{3\sqrt{a}}.$$

4. V rovině, v níž je dána úsečka BD, najděte množinu všech vrcholů A konvexních čtyřúhelr
$ABCD$, pro které současně platí:

a) střed O_C kružnice vepsané trojúhelníku BCD leží na kružnici opsané trojúhelníku ABD,

b) střed O_A kružnice vepsané trojúhelníku ABD leží na kružnici opsané trojúhelníku BCD.

Řešení: Označme $\alpha = |\angle BAD|$ a $\gamma = |\angle BCD|$. Platí

$$|\angle BO_C D| = 180^\circ - (|\angle O_C BD| + |\angle O_C DB|) =$$

$$= 180^\circ - \frac{1}{2}(|\angle CBD| + |\angle CDB|) = 90^\circ + \frac{1}{2}\gamma$$

podobně $|\angle BO_A D| = 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha$. Protože body A a O_C leží v opačných polorovinách s hraniční přímkou BI podmínka a) úlohy ekvivalentní s tím, že součet velikostí úhlů BAD a $BO_C D$ je 180°, tj. $\alpha + (90^\circ + \frac{1}{2}\gamma) = 1$ Podobně usoudíme, že podmínka b) je splněna, právě když $\gamma + (90^\circ + \frac{1}{2}\alpha) = 180^\circ$. Nalezená dvojice ro má jediné řešení $\alpha = \gamma = 60^\circ$. Proto body A a C leží každý na jiném ze dvou kruhových oblouků, ze kter je úsečku BD vidět pod úhlem 60°. Na druhé straně, zvolíme-li libovolný vnitřní bod A jednoho z tě oblouků, lze na druhém oblouku vybrat bod C tak, aby $ABCD$ byl *konvexní* čtyřúhelník (stačí napří trojúhelník ABD doplnit na rovnoběžník $ABCD$).

Odpověď: Hledanou množinu vrcholů A tvoří vnitřní body dvou kruhových oblouků, ze kterých je úse BD vidět pod úhlem 60°.

Do pokynů pro bodování: Pokud řešitel nevysvětlí, proč *každý* bod A nalezené množiny je vrcho některého vyhovujícího čtyřúhelníku $ABCD$, udělte nejvýše 5 bodů.