47. ročník matematické olympiády

Úlohy II. kola kategorie B

1. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$
\begin{aligned}
xy &= ax + ay,\\
xz &= 2x + 2z,\\
yz &= 3y + 3z,
\end{aligned}
$$

kde a je reálný parametr. Proveďte diskusi o počtu řešení vzhledem k parametru a.

2. Popište konstrukci trojúhelníku ABC, v němž při obvyklém označení platí $t_a = 9\,\mathrm{cm}$, $t_b = 12\,\mathrm{cm}$ a $3c = 2t_c$.

3. Je dána čtvercová tabulka 3×3 přirozených čísel, v níž je součin všech čísel v každém řádku, v každém sloupci i na obou úhlopříčkách roven číslu s.

a) Dokažte, že číslo s je třetí mocninou přirozeného čísla.

b) Pokud je jedno z rohových čísel tabulky rovno 1, je součet všech čtyř rohových čísel druhou mocninou přirozeného čísla. Dokažte.

4. V daném ostroúhlém trojúhelníku ABC označme A_1, B_1 paty výšek z vrcholů A, B. Určete velikosti jeho vnitřních úhlů při vrcholech B a C, je-li velikost úhlu BAC rovna $40°$ a jsou-li poloměry kružnic vepsaných trojúhelníkům A_1B_1C a ABC v poměru $1 : 2$.

II. kolo kategorie B se koná

v úterý 31. března 1998

tak, aby začalo dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. Z druhé a třetí rovnice, které upravíme do tvaru

$$x(z-2)=2z, \qquad y(z-3)=3z,$$

plyne podmínka $z \notin \{2,3\}$ a vyjádření

$$x=\frac{2z}{z-2}, \qquad y=\frac{3z}{z-3}. \tag{1}$$

Jejich dosazením do první rovnice soustavy dostaneme

$$\frac{6z^2}{(z-2)(z-3)}=\frac{2az}{z-2}+\frac{3az}{z-3}$$

a po úpravě

$$z\big((6-5a)z+12a\big)=0.$$

Odtud plyne, že je buď $z=0$ (pak $x=y=0$), nebo (za předpokladu $a \neq \frac{6}{5}$)

$$z=\frac{12a}{5a-6},$$

odkud podle (1) dostáváme řešení

$$x=\frac{12a}{a+6}, \quad y=\frac{12a}{6-a}, \quad z=\frac{12a}{5a-6}. \tag{2}$$

Přitom podmínka $z \notin \{2,3\}$ je ekvivalentní podmínce $a \notin \{-6,6\}$. Navíc si všimněme, že pro $a=0$ dává (2) řešení $x=y=z=0$. Toto řešení zřejmě soustavě vyhovuje při libovolném reálném a.

Závěr. Pro $a \in \{-6,0,\frac{6}{5},6\}$ má soustava jediné řešení $x=y=z=0$, pro zbývající reálná a má soustava navíc i nenulové řešení (2).

Jiné řešení. Trojice $x=y=z=0$ je řešením dané soustavy. Z druhé a třetí rovnice plyne, že pokud je jedno z čísel x, y, z rovno nule, jsou nulová i zbývající dvě. Proto dále předpokládejme, že $xyz \neq 0$. Pak nutně i $a \neq 0$. Soustavu přepíšeme do tvaru

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}, \quad \frac{1}{2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{z}, \quad \frac{1}{3}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}.$$

To je soustava lineární vzhledem k neznámým $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$. Snadno najdeme její (jediné) řešení

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{12}+\frac{1}{2a}, \quad \frac{1}{y}=-\frac{1}{12}+\frac{1}{2a}, \quad \frac{1}{z}=\frac{5}{12}-\frac{1}{2a}.$$

Odtud určíme trojici

$$x=\frac{12a}{a+6}, \quad y=\frac{12a}{6-a}, \quad z=\frac{12a}{5a-6}, \tag{3}$$

která je řešením, pokud $a \notin \{-6,6,\frac{6}{5}\}$.

Závěr. Pro $a \in \{-6,0,\frac{6}{5},6\}$ má soustava jediné řešení $x=y=z=0$; pro ostatní hodnoty a má soustava i druhé řešení (3).

Za úplné řešení úlohy udělte 6 bodů.

2. Označme T těžiště uvažovaného trojúhelníku ABC, S střed jeho strany AB. Z podmínky $3c = 2t_c$ plyne $\frac{1}{3}t_c = \frac{1}{2}c$. Platí tedy $|SA| = |SB| = |ST| = \frac{1}{2}c$. To znamená, že bod S je středem kružnice opsané trojúhelníku ABT, která je Thaletovou kružnicí sestrojenou nad průměrem AB. Platí proto $|\sphericalangle ATB| = 90°$. Odtud již bezprostředně plyne konstrukce:

Nejprve podle věty *sus* sestrojíme trojúhelník ABT, v němž platí

$$|AT| = \frac{2}{3}t_a = 6\,\mathrm{cm}, \quad |BT| = \frac{2}{3}t_b = 8\,\mathrm{cm} \quad \text{a} \quad |\sphericalangle ATB| = 90°,$$

a dále už snadno sestrojíme trojúhelník ABC.

Úloha má právě jedno řešení.

Za úplné řešení a sestrojení trojúhelníku ABC udělte 6 bodů.

3. Uvažujme čtvercovou tabulku 3×3 (obr. 1) splňující podmínky úlohy.

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Obr. 1

a) Z tabulky je patrné, že pro uvažovaný součin s platí

$$s = \frac{(aei)(def)(gec)}{(adg)(cfi)} = e^3.$$

Číslo s je tedy třetí mocninou přirozeného čísla e, které je umístěno uprostřed tabulky.

b) Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $a = 1$ (otočením tabulky o $90°$ nebo o $180°$ se uvažované vlastnosti tabulky nezmění). Vzhledem k výsledku části a) ze součinu čísel na obou úhlopříčkách zjistíme, že musí být $i = e^2$ a $c = \dfrac{e^2}{g}$. Ze součinu čísel v třetím řádku pak dostaneme, že $h = \dfrac{e}{g}$, a ze součinu čísel v třetím sloupci $f = \dfrac{g}{e}$. Protože h i f jsou přirozená čísla, musí být $e = g$, a proto také $h = f = 1$. Uvažovaná čtvercová tabulka je tedy typově shodná s tabulkou na obr. 2. Odtud plyne, že součet všech čtyř čísel v jejích rohových polích je

1	e^2	e
e^2	e	1
e	1	e^2

Obr. 2

$$a + c + g + i = 1 + e + e + e^2 = (1 + e)^2,$$

což je druhá mocnina přirozeného čísla. Tím je důkaz hotov.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, přitom za důkaz části a) maximálně 2 body.

4. Označme α, β, γ velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC. Paty výšek A_1 a B_1 (obr. 3) leží na Thaletově kružnici s průměrem AB, čtyřúhelník ABA_1B_1 je tedy tětivový a pro jeho protější úhly platí $|\sphericalangle CAB| + |\sphericalangle BA_1B_1| = 180°$. Je tudíž $|\sphericalangle B_1A_1C| = \alpha$, takže trojúhelníky ABC a A_1B_1C jsou podobné podle věty *uu*.

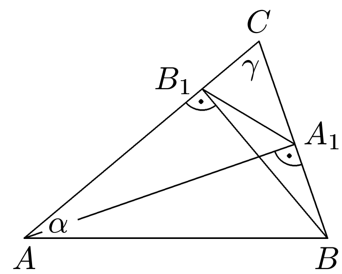
Označíme-li ϱ a ϱ_1 poloměry kružnic vepsaných po řadě trojúhelníkům ABC a A_1B_1C, plyne ze zmíněné podobnosti

$$\cos\gamma = \frac{|B_1C|}{|BC|} = \frac{|A_1C|}{|AC|} = \frac{\varrho_1}{\varrho} = \frac{1}{2},$$

takže $\gamma = 60°$. Vzhledem k tomu, že $\alpha = 40°$, dostáváme konečně $\beta = 80°$.

Tím je úloha vyřešena.

Za úplné vyřešení úlohy udělte 6 bodů, přitom za důkaz podobnosti podobnosti trojúhelníků ABC a A_1B_1C dejte 3 body.



Obr. 3