47. ročník matematické olympiády

Úlohy II. kola kategorie C

1. Ze tří různých nenulových číslic jsme sestavili všech šest možných trojciferných čísel. Tato čísla jsme seřadili od největšího po nejmenší. Zjistili jsme, že čtvrté číslo v této řadě je aritmetickým průměrem prvního a pátého čísla. Z kterých číslic byla čísla sestavena? Zjistěte všechny možnosti.

2. Je dán rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB. Najděte všechny body X tohoto trojúhelníku s následující vlastností: Vedeme-li bodem X přímku rovnoběžnou s AB a přímku kolmou na AB, vytne na nich trojúhelník ABC dvě shodné úsečky.

3. Najděte všechna kladná čísla x, pro která je mezi deseti čísly

$$[x],\ [2x],\ [3x],\ [4x],\ [5x],\ [6x],\ [7x],\ [8x],\ [9x],\ [10x]$$

právě devět různých. Symbol $[a]$ je celá část reálného čísla a, tj. celé číslo, pro které platí $[a] \leqq a < [a] + 1$. Například $[3{,}7] = 3$, $[4] = 4$.

4. Najděte všechny lichoběžníky $ABCD$ se základnami AB a CD, pro které platí: $|AB| = 6\,\mathrm{cm}$, $|CD| = 4\,\mathrm{cm}$ a

$$|BC| + d_A = |AD| + d_B = |AB| + v,$$

kde v značí výšku lichoběžníku, d_A vzdálenost bodu A od přímky BC a d_B vzdálenost bodu B od přímky AD.

II. kolo kategorie C se koná

v úterý 31. března 1998

tak, aby začalo dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. Označme hledané číslice $a < b < c$. Potom uvedených šest čísel bylo seřazených takto:

$$\overline{cba} > \overline{cab} > \overline{bca} > \overline{bac} > \overline{acb} > \overline{abc}.$$

Protože

$$\overline{bac} = \frac{\overline{cba} + \overline{acb}}{2},$$

dostaneme po rozepsání dekadických zápisů a úpravě

$$4c + 3a = 7b, \qquad \text{neboli} \qquad 4(c - b) = 3(b - a).$$

Odtud plyne, že $c - b$ je dělitelné třemi. Protože $0 < c - b < 9$, mohou nastat dva případy:
- $c - b = 3$, $b - a = 4$. Odtud $b = a + 4$ a $c = a + 7$, $a \leqq 2$. Úloha má dvě řešení: $a = 1$, $b = 5$, $c = 8$, anebo $a = 2$, $b = 6$, $c = 9$.
- $c - b = 6$, $b - a = 8$. Odtud $c = a + 14$, což pro číslice a, c nemůže platit.

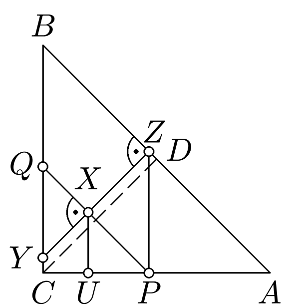
  Čísla byla sestavena z číslic 1, 5, 8, anebo 2, 6, 9.

Za úplné řešení je 6 bodů.

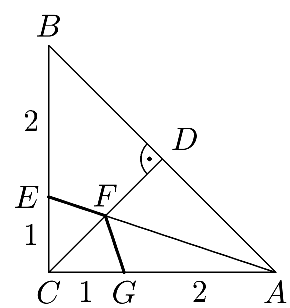
2. Označme D střed strany AB. Předpokládejme nejprve, že bod X leží uvnitř trojúhelníku BCD nebo na jeho hranici. K bodu X sestrojme odpovídající úsečky popsané v úloze a jejich koncové body označme P, Q, Y, Z (obr. 1). Trojúhelník QXY je zřejmě pravoúhlý a rovnoramenný, tedy $|XY| = |XQ|$. Aby bylo $|YZ| = |PQ|$, musí být $|ZX| = |XP|$, tedy trojúhelník ZXP musí být rovněž pravoúhlý a rovnoramenný. V tom případě je také $ZP \parallel BC$. Označme dále U patu kolmice z bodu X na AC. Zřejmě $2|UP| = 2|XU| = \sqrt{2}|XP| = |ZP| = |PA|$. Má-li tedy bod X mít požadovanou vlastnost, musí být

$$\frac{|XU|}{|UA|} = \frac{1}{3}.$$

Tím je jednoznačně určen úhel XAC, proto všechny vyhovující body v trojúhelníku BCD leží na přímce. Její průsečík s BC je zřejmě bod E takový, že $2|CE| = |EB|$. Označme dále F průsečík přímky EA s výškou CD.



Obr. 1



Obr. 2

Obdobnou úvahou pro trojúhelník ACD zjistíme, že v tomto trojúhelníku mohou vyhovovat jen body patřící úsečce FG, kde G je takový bod strany AC, že $2|CG| = |GA|$ (obr. 2).

Ukážeme, že naopak každý bod X lomené čáry EFG má požadovanou vlastnost: Pro libovolný bod $X \in EF$ (případ $X \in FG$ je obdobný) stačí podle předchozího dokázat rovnost $|XP| = |XZ|$, kde body $Z \in AB$ a $P \in AC$ jsou stejně jako předtím takové, že $XP \parallel AB$, $XZ \perp AB$. Pro kolmý průmět U bodu X na stranu AC a pro kolmý průmět V bodu P na stranu AB platí $|XU| = \frac{1}{3}|UA|$, proto je $|XP| = \sqrt{2}|UP| = \frac{1}{2}\sqrt{2}|AP| = |PV| = |XZ|$.

Za úplné řešení je 6 bodů, 4 body dejte za nalezení množiny bodů X, 2 body za důkaz, že každý bod nalezené množiny má požadovanou vlastnost.

3. Nejdříve uvážíme, že $x < 1$. Pro $x \geqq 1$ totiž platí $(k+1)x \geqq kx + 1$, odkud $[(k+1)x] > [kx]$, takže $[x] < [2x] < \ldots < [10x]$ je deset různých čísel. Pokud je $0 < x < 1$, je $[x] = 0$. Z nerovností $kx < (k+1)x < kx + 1$ pro každé přirozené číslo k vyplývá, že buď $[(k+1)x] = [kx]$, anebo $[(k+1)x] = [kx] + 1$. Proto se v dané řadě deseti čísel musí vyskytovat právě devět po sobě jdoucích celých nezáporných čísel. To znamená, že poslední číslo v řadě je právě o 8 větší než první (rovné nule), tedy

$$[10x] = 8. \tag{1}$$

Obráceně každé řešení x rovnice (1) vyhovuje podmínce úlohy, neboť nutně $x < 1$, takže žádné z čísel $0, 1, 2, \ldots, 8$ nemůže ve zkoumané řadě chybět. Rovnici (1) vyhovují právě ta x, pro něž $8 \leqq 10x < 9$, neboli $\frac{4}{5} \leqq x < \frac{9}{10}$. Řešením úlohy je tedy interval $\langle \frac{4}{5}, \frac{9}{10})$.

Jiné řešení. Hledáme ta $x > 0$, pro která v řadě nerovností

$$[x] \leqq [2x] \leqq [3x] \leqq \ldots \leqq [10x]$$

nastane právě jedna rovnost. Nechť tedy pro některé $n \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ platí

$$[x] < [2x] < \ldots < [nx] = [(n+1)x] < [(n+2)x] < \ldots < [10x].$$

Z vypsané rovnosti vyplývá, že $x < 1$, a proto musí být naše řada tvořena po sobě jdoucími celými čísly počínaje nulou. To je ekvivalentní s nerovnostmi

(i) $k > kx \geqq k - 1$, tedy $1 > x \geqq \dfrac{k-1}{k}$ pro $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$;

(ii) $k - 1 > kx \geqq k - 2$, tedy $\dfrac{k-1}{k} > x \geqq \dfrac{k-2}{k}$ pro $k \in \{n+1, \ldots, 10\}$.

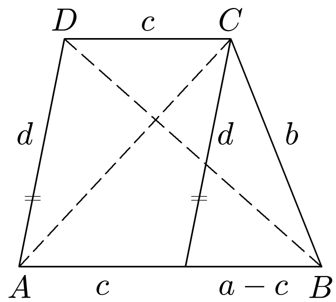
Všechny nerovnosti v (i) jsou splněny, právě když platí $1 > x \geqq \dfrac{n-1}{n}$, a všechny nerovnosti v (ii) jsou splněny, právě když $\dfrac{n}{n+1} > x \geqq \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$. To je možné jen tehdy, je-li $\dfrac{n}{n+1} > \dfrac{4}{5}$, tedy když $n \geqq 5$. Pro taková n ale platí

$$1 > \frac{n}{n+1} > \frac{n-1}{n} \geqq \frac{4}{5},$$

takže řešením soustavy nerovnic $1 > x \geqq \dfrac{n-1}{n}$, $\dfrac{n}{n+1} > x \geqq \dfrac{4}{5}$ pro $n \geqq 5$ je interval $\left\langle \dfrac{n-1}{n}, \dfrac{n}{n+1} \right)$. Pro $n = 5, 6, 7, 8, 9$ tak dostáváme intervaly $\left\langle \frac{4}{5}, \frac{5}{6} \right)$, $\left\langle \frac{5}{6}, \frac{6}{7} \right)$, …, $\left\langle \frac{8}{9}, \frac{9}{10} \right)$; jejich sjednocením je interval $\left\langle \frac{4}{5}, \frac{9}{10} \right)$, což je množina všech hledaných x.

Za úplné řešení je 6 bodů, z toho 2 body za úvahu vedoucí ke zjištění, že $x < 1$.

4. Lichoběžník se základnami a, c a rameny b, d existuje a je jediný, právě když existuje trojúhelník se stranami $|a - c|$, b a d (obr. 3).



Obr. 3

Všimněme si trojúhelníku ABC. Protože pro jeho výšky na strany BC a AB platí $v_{AB} = v$, $v_{BC} = d_A$, je dle předpokladu

$$|BC| + v_{BC} = |AB| + v_{AB}.$$

Na základě výsledku 2. úlohy domácího kola tedy platí $|AB| = |BC|$ nebo $|\sphericalangle ABC| = 90°$. Analogicky v trojúhelníku ABD dostaneme $|AD| = |AB|$ nebo $|\sphericalangle DAB| = 90°$. Proto musí nastat jeden ze čtyř případů:

1. $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle DAB| = 90°$.
   Potom by ale $ABCD$ nebyl lichoběžník.
2. $|AB| = |BC| = |AD| = 6\,\mathrm{cm}$.
   Protože $|CD| = 4\,\mathrm{cm}$, existuje takový lichoběžník $ABCD$ právě jeden, neboť existuje trojúhelník se stranami délek 6 cm, 6 cm, 2 cm.
3. $|AB| = |BC| = 6\,\mathrm{cm}$; $|\sphericalangle DAB| = 90°$.
   Protože $|CD| = 4\,\mathrm{cm}$, tak $|AD| = \sqrt{6^2 - (6-4)^2}\,\mathrm{cm} = \sqrt{32}\,\mathrm{cm}$. Takovýto lichoběžník existuje právě jeden, neboť existuje trojúhelník se stranami 2 cm, 6 cm, $\sqrt{32}$ cm.
4. $|AB| = |AD| = 6\,\mathrm{cm}$; $|\sphericalangle ABC| = 90°$.
   Je to analogický případ jako 3 (vyměníme ramena AD a BC).
   Dané úloze vyhovují právě tři lichoběžníky uvedené v bodech 2, 3, 4.

Za úplné řešení je 6 bodů.