47. ročník matematické olympiády, III. kolo kategorie A

Uherské Hradiště 22.–25. března 1998

---

1. V oboru kladných reálných čísel řešte rovnici

$$x \cdot \bigl[x \cdot \bigl[x \cdot [x]\bigr]\bigr] = 88,$$

kde $[a]$ je celá část reálného čísla a, tj. celé číslo, pro které platí $[a] \leqq a < [a] + 1$. Například $[3{,}7] = 3$ a $[6] = 6$. (*J. Šimša*)

Řešení. Je-li $0 < x < 3$, je levá strana rovnice menší než $3^4 = 81$, naopak pro $x \geqq 4$ je nejméně $4^4 = 256$. Proto nutně $[x] = 3$; pro taková x řešíme rovnici $x \cdot \bigl[x \cdot [3x]\bigr] = 88$. Protože $x \geqq 3$, platí $[3x] \geqq 9$; kdybychom připustili, že $[3x] \geqq 10$, dostali bychom odhad $x \cdot \bigl[x \cdot [3x]\bigr] \geqq 3 \cdot 3 \cdot 10 = 90$. Proto nutně $[3x] = 9$ a dále řešíme rovnici $x \cdot [9x] = 88$ za předpokladu $9 \leqq 3x < 10$, neboli $27 \leqq 9x < 30$. Pro $9x < 28$ vychází $x \cdot [9x] < \frac{28}{9} \cdot 27 = 84$, pro $9x \geqq 29$ zase $x \cdot [9x] \geqq \frac{29}{9} \cdot 29 > 90$, takže $[9x] = 28$; tehdy z rovnice $x \cdot [9x] = 88$ plyne konečně $x = \frac{88}{28} = \frac{22}{7}$. Protože pro nalezené číslo x platí

$$[x] = \left[\frac{22}{7}\right] = 3,\ [3x] = \left[\frac{66}{7}\right] = 9,\ [9x] = \left[\frac{198}{7}\right] = 28,$$

jde skutečně o (jediné) řešení.

---

2. Dokažte, že z libovolných čtrnácti různých přirozených čísel lze pro některé číslo k ($1 \leqq k \leqq 7$) vybrat dvě disjunktní k-prvkové podmnožiny $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ a $\{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ tak, aby se součty

$$A = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_k} \quad \text{a} \quad B = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \ldots + \frac{1}{b_k}$$

navzájem lišily o méně než 0,001, tj. aby platilo $|A - B| < 0{,}001$. (*J. Šimša*)

Řešení. Uvažujme všech $\binom{14}{7} = 3\,432$ součtů

$$S = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_7},$$

kde $x_1 < x_2 < \ldots < x_7$ je libovolná sedmice vybraná z daných čtrnácti přirozených čísel. Pro každý z těchto součtů S platí odhady

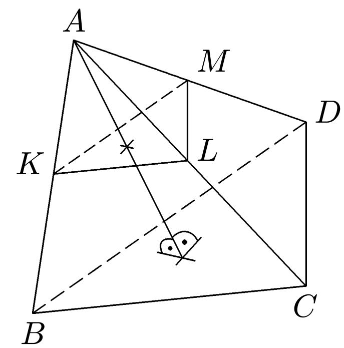
$$0 < S \leqq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{7} = 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} < 3,$$

takže se jedná o 3 432 (ne nutně různých) čísel z otevřeného intervalu $(0, 3)$. Proto se některé dva z uvažovaných součtů liší o méně než 0,001; vyloučíme-li z obou příslušných sedmic případné společné prvky, zmenší se oba součty o tutéž hodnotu (takže se jejich rozdíl nezmění) a v každé skupině zůstane stejný (nenulový, neboť šlo o dvě různé sedmice) počet prvků. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

---

3. Do daného čtyřstěnu $ABCD$ je vepsána koule. Její čtyři tečné roviny, které jsou se stěnami čtyřstěnu rovnoběžné, z něj odtínají čtyři menší čtyřstěny. Dokažte, že součet délek všech 24 jejich hran je roven dvojnásobku součtu délek hran celého čtyřstěnu $ABCD$.
(*P. Leischner*)

Řešení. Označme ϱ poloměr vepsané koule a v_A, v_B, v_C, v_D tělesové výšky daného čtyřstěnu (s indexy podle vrcholů, ze kterých vycházejí). Odťatý čtyřstěn $AKLM$ (obr. 1) je stejnolehlý podle středu A s celým čtyřstěnem $ABCD$. Součty délek jejich hran jsou proto ve stejném poměru jako jejich tělesové výšky ze společného vrcholu A, tedy v poměru $(v_A - 2\varrho) : v_A$, neboť 2ϱ je vzdálenost rovin KLM a BCD (jsou totiž rovnoběžné a obě se dotýkají vepsané koule). Stejnou úvahu můžeme zopakovat pro ostatní tři odťaté čtyřstěny. Naší úlohou je proto dokázat rovnost



Obr. 1

$$\frac{v_A - 2\varrho}{v_A} + \frac{v_B - 2\varrho}{v_B} + \frac{v_C - 2\varrho}{v_C} + \frac{v_D - 2\varrho}{v_D} = 2,$$

která je ekvivalentní s rovností

$$\varrho\Big(\frac{1}{v_A} + \frac{1}{v_B} + \frac{1}{v_C} + \frac{1}{v_D}\Big) = 1.$$

K tomu nám pomůže následující úvaha o objemu V a povrchu S čtyřstěnu $ABCD$. Předně $S = S_A + S_B + S_C + S_D$ (kde S_X značí obsah té stěny, jež neobsahuje vrchol X), dále

$$V = \frac{1}{3}S_A v_A = \frac{1}{3}S_B v_B = \frac{1}{3}S_C v_C = \frac{1}{3}S_D v_D$$

a konečně $V = \dfrac{1}{3}\varrho S$. Podle těchto vzorců platí

$$\varrho\Big(\frac{1}{v_A} + \frac{1}{v_B} + \frac{1}{v_C} + \frac{1}{v_D}\Big) = \frac{3V}{S}\Big(\frac{S_A}{3V} + \frac{S_B}{3V} + \frac{S_C}{3V} + \frac{S_D}{3V}\Big) = 1$$

a tím je celý důkaz hotov.

---

4. Do výrazu

$$\text{den}^{\text{měsíc}} - \text{rok}$$

dosazujeme libovolné datum letošního roku (1998) a poté zjišťujeme největší mocninu čísla 3, která dělí výsledné číslo. Např. pro 21. duben vychází číslo $21^4 - 1\,998 = 192\,483 = 3^3 \cdot 7\,129$, což je násobek mocniny 3^3, ne však mocniny 3^4. Zjistěte všechny dny, pro které je odpovídající mocnina největší.
(*R. Kollár*)

Řešení. Protože $1\,998 = 3^3(3 \cdot 24 + 2)$, je zkoumaný rozdíl $d^m - 1\,998$ dělitelný číslem 3^4 (o jinou situaci se ani nemusíme starat), právě když je i mocnina d^m tvaru

$$d^m = 3^3(3k + 2) \tag{1}$$

pro vhodné celé číslo k. Odtud předně vyplývá, že $3 \mid d$ a že exponent m je liché číslo menší než 4; zároveň však $m \neq 1$, neboť žádné číslo $d \in \{1, 2, \ldots, 31\}$ není tvaru pravé strany (1). Proto nutně $m = 3$; pak ale z (1) plyne, že $3^2 \nmid d$, tudíž $d = 3(3n \pm 1)$ pro vhodné znaménko a některé celé číslo n. Dosazením dostaneme

$$d^m - 1\,998 = (9n \pm 3)^3 - 3^3(3 \cdot 24 + 2) = 3^3[3^3 n^3 \pm 3^3 n^2 + 3^2 n \pm 1 - 3 \cdot 24 - 2].$$

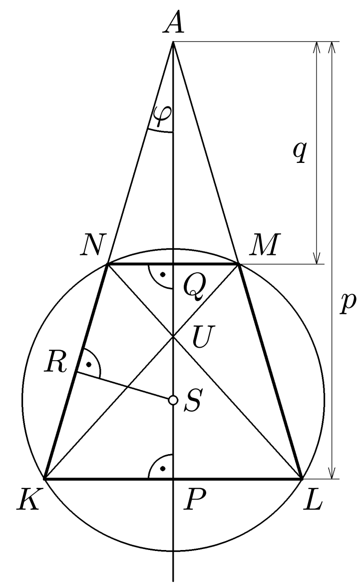
Snadno nahlédneme, že hodnota výrazu v hranaté závorce je dělitelná třemi jen při variantě se znaménkem minus, ani tehdy však není dělitelná devíti (je totiž tvaru $9N - 3 \cdot 25$). Hledaná největší mocnina je proto 3^4 a odpovídá právě těm březnovým ($m = 3$) dnům, které mají pořadové číslo tvaru $d = 3(3n - 1)$, tedy 6., 15. a 24. březnu.

---

5. Ve vnější oblasti kružnice k je dán bod A. Všechny lichoběžníky, které jsou do kružnice k vepsány tak, že jejich prodloužená ramena se protínají v bodě A, mají společný průsečík úhlopříček. Dokažte. (*P. Leischner*)

Řešení. Základny KL a MN každého z uvažovaných lichoběžníků $KLMN$ jsou dvě rovnoběžné tětivy kružnice k, takže mají společnou osu souměrnosti. Na ní leží střed S kružnice k, středy P a Q základen KL a MN, průsečík U úhlopříček KM a LN i průsečík A prodloužených ramen (tedy polopřímek) KN a LM (obr. 2). Protože polopřímka AS na volbě lichoběžníku $KLMN$ nezávisí, stačí dokázat, že na něm nezávisí ani délka úsečky AU. Vyjádříme ji nejprve pomocí délek $p = |AP|$ a $q = |AQ|$ (ukáže se, že je jejich harmonickým průměrem). Délky $|PU|$ a $|QU|$ snadno vypočteme z dvojice rovnic

$$|PU| + |QU| = p - q \quad \text{a} \quad \frac{|PU|}{|QU|} = \frac{|KL|}{|MN|} = \frac{p}{q}$$



Obr. 2

(rovnosti poměrů plynou z podobností $\triangle KLU \sim \triangle MNU$ a $\triangle KLA \sim \triangle NMA$). Vyjde nám

$$|PU| = \frac{p(p-q)}{p+q} \quad \text{a} \quad |QU| = \frac{q(p-q)}{p+q},$$

a proto

$$|AU| = |AQ| + |QU| = q + \frac{q(p-q)}{p+q} = \frac{2pq}{p+q}.$$

Nyní sem dosadíme $p = |AK| \cos\varphi$ a $q = |AN| \cos\varphi$, kde $\varphi = |\sphericalangle PAK|$, a při následné úpravě využijeme toho, že

$$|AK| + |AN| = 2|AR| = 2|AS| \cos\varphi,$$

kde R je střed tětivy KN. Dostaneme tak

$$|AU| = \frac{2pq}{p+q} = \frac{2|AK| \cdot |AN| \cos^2\varphi}{(|AK| + |AN|)\cos\varphi} = \frac{|AK| \cdot |AN|}{|AS|}.$$

Zbývá využít mocnost bodu A k dané kružnici $k(S, r)$: součin $|AK| \cdot |AN|$ je roven rozdílu $|AS|^2 - r^2$, tedy na volbě lichoběžníku $KLMN$ nezávisí. Nezávislost veličiny $|AU|$ je tak dokázána.

6. Nechť a, b, c jsou kladná čísla. Dokažte, že trojúhelník o stranách a, b, c existuje, právě když soustava rovnic

$$\frac{y}{z}+\frac{z}{y}=\frac{a}{x},\quad \frac{z}{x}+\frac{x}{z}=\frac{b}{y},\quad \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{c}{z}$$

má v oboru reálných čísel řešení. *(P. Černek, J. Zhouf)*

Řešení. Pravá strana první rovnice má stejné znaménko jako neznámá x ($\neq 0$), levá strana jako součin yz ($\neq 0$). Libovolné řešení (x,y,z) dané soustavy proto splňuje podmínku

$$xyz>0. \tag{1}$$

Jak víme, kladná čísla a, b, c tvoří strany některého trojúhelníku, právě když je kladné každé ze tří čísel

$$a+b-c,\quad a+c-b,\quad b+c-a. \tag{2}$$

Je-li (x,y,z) řešení dané soustavy, pak

$$a+b-c=x\Big(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\Big)+y\Big(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\Big)-z\Big(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\Big)=\frac{2xy}{z},$$

což je podle (1) číslo kladné; analogicky zjistíme, že

$$a+c-b=\frac{2xz}{y}>0 \quad \text{a} \quad b+c-a=\frac{2yz}{x}>0.$$

V druhé části řešení naopak předpokládejme, že každé z čísel (2) je kladné, a najděme *všechna* řešení dané soustavy (i když by stačilo uvést řešení *jedno*). Pomohou nám při tom předchozí výpočty, podle kterých musí například platit

$$(a+b-c)(a+c-b)=\frac{2xy}{z}\cdot\frac{2xz}{y}=4x^2.$$

Tato a další dvě analogické rovnosti vedou k vyjádření

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{\varepsilon_1}{2}\sqrt{(a+b-c)(a+c-b)}\\ y&=\frac{\varepsilon_2}{2}\sqrt{(a+b-c)(b+c-a)}\\ z&=\frac{\varepsilon_3}{2}\sqrt{(a+c-b)(b+c-a)}\end{aligned}\right\}, \tag{3}$$

kde $\varepsilon_i=\pm1$ pro $i\in\{1,2,3\}$, přitom $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3=1$ podle (1). Takové trojice $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ jsou zřejmě právě čtyři; podle (3) tak dostáváme čtyři trojice (x,y,z). Přímým dosazením a rutinním výpočtem ověříme, že jsou to skutečně řešení zadané soustavy.