39. mezinárodní matematická olympiáda 10.–21. července 1998 (Taipei)

Letošní Mezinárodní matematické olympiády se zúčastnilo o něco méně studentů než v předchozích dvou letech (částečně i proto, že z politických důvodů olympiádu bojkotovalo družstvo Čínské lidové republiky), a to 419 studentů ze 76 zemí celého světa.

Když se podíváme na celkové výsledky včetně neoficiálního pořadí zemí, jež se součtem výsledků svých studentů umístily v první třicítce, vidíme, že jsme letos dosáhli jednoho z nejlepších výsledků v posledních letech. Všichni naši studenti se vrátili s medailí, a i když od nejlepšího *Pavla Podbrdského* jsme čekali, že stejně jako vloni dosáhne na zlatou, jsou tři stříbrné a tři bronzové medaile povzbuzením pro další ročníky.

Ze slovenských reprezentantů byl nejlepší *František Kardoš*, který měl ke zlatu ještě o bod blíž než náš Podbrdský.

Podrobné výsledky našich reprezentantů ukazuje tabulka:

lohy	1.	2.	3.	4.	5.	6.	body	ceny	poad
Libor Barto 4. roč. *G Praha 1, Hellichova*	0	7	6	6	7	0	26	II	73.–85.
Tomáš Hanžl 4. roč. *G Brno, tř. kpt. Jaroše*	3	0	7	7	0	3	20	III	134.–144.
Pavel Podbrdský 4. roč. *G Brno, tř. kpt. Jaroše*	7	7	7	7	0	1	29	II	49.–57.
Jan Šťovíček 4. roč. *G Kladno*	2	7	2	6	2	0	19	III	145.–157.
Martin Viščor 3. roč. *G Brno, tř. kpt. Jaroše*	7	0	1	0	7	0	15	II	183.–193.
Lukáš Vokřínek 3. roč. *G Brno, tř. kpt. Jaroše*	4	7	1	7	7	0	26	II	73.–85.

Pro porovnání uvádíme i výsledky slovenských studentů:

lohy	1.	2.	3.	4.	5.	6.	body	ceny	poad
Kristina Černeková 3. roč. *G Brno, tř. kpt. Jaroše*	0	0	1	0	0	0	1	–	388.–403.
Juraj Földes 4. roč. *G J. Hronca Bratislava*	2	0	2	7	3	0	14	III	194.–205.
František Kardoš 4. roč. *G Alejová, Košice*	2	7	7	7	7	0	30	II	38.–48.
Peter Kozák 3. roč. *G J. Hronca Bratislava*	4	0	0	7	3	0	14	III	194.–205.
Ján Špakula 4. roč. *G Poštová, Košice*	5	0	2	7	0	0	14	III	194.–205.
Vladimír Zajac 2. roč. *G Grösslingová, Bratislava*	0	7	1	0	7	0	15	III	183.–193.

Na třetí cenu letos stačilo 14 bodů, druhá cena se udělovala za 24–30 bodů a první za alespoň 31 bodů. Řešitelů, kteří si z Taipei odvezli zlatou medaili, bylo celkem 37. Mezi nimi byl jediný, který získal plný počet 42 bodů, Íránec *Omid Amini*. Největším překvapením asi tentokrát bylo umístění Íránu na nejvyšší příčce neoficiálního pořadí, ale i to, že z první desítky vypadlo Rumunsko a Německo, které skončilo se stejným počtem medailí dokonce o pár bodů za námi.

	I	II	III	body
Írán	5	1	0	211
Bulharsko	3	3	0	195
Maďarsko	4	2	0	186
USA	3	3	0	186
Tchaj-wan	3	2	1	184
Rusko	2	3	1	175
Indie	3	3	0	174
Ukrajina	1	3	2	166
Vietnam	1	3	2	158
Jugoslávie	0	5	0	156
Rumunsko	3	0	2	155
Korea	2	2	2	154
Austrálie	0	4	2	146
Japonsko	1	1	3	139
Česká republika	0	3	3	135
Německo	0	3	2	129
Turecko	0	2	4	122
Velká Británie	0	1	4	122
Bělorusko	0	1	4	118
Kanada	1	1	2	113
Polsko	1	1	1	112
Chorvatsko	0	0	5	110
Singapur	0	1	3	110
Izrael	0	0	5	104
Hongkong	0	1	3	102
Arménie	0	2	2	100
Francie	1	0	2	100
JAR	0	1	2	98
Argentina	1	0	3	97
Brazílie	1	0	1	91
Mongolsko	0	2	2	91
Řecko	0	2	1	90
Bosna a Hercegovina	0	1	2	88
Slovensko	0	1	4	88
Kazachstán	0	0	2	81
Gruzie	0	0	3	78
Lotyšsko	0	1	3	74
Itálie	0	0	3	72

	I	II	III	body
Belgie	0	1	1	71
Makedonie	0	0	1	69
Kolumbie	1	0	0	66
Thajsko	0	0	2	65
Estonsko	0	1	1	63
Mexiko	0	1	0	62
Nizozemsko	0	1	0	62
Peru	0	2	0	60
Švédsko	0	0	2	58
Rakousko	0	0	2	57
Nový Zéland	0	0	2	50
Moldavsko	0	1	1	45
Slovinsko	0	0	1	44
Island	0	0	0	42
Maroko	0	0	0	42
Ázerbajdžán	0	0	1	41
Litevsko	0	0	1	40
Kypr	0	0	1	39
Švýcarsko	0	0	0	37
Irsko	0	0	1	36
Španělsko	0	0	1	36
Trinidad a Tobago	0	0	1	36
Norsko	0	0	0	33
Malajsie	0	0	0	32
Finsko	0	0	0	30
Macao	0	0	0	29
Lucembursko	0	0	1	25
Dánsko	0	0	0	21
Kuba	0	0	1	19
Indonézie	0	0	0	16
Kirgizie	0	0	0	14
Filipíny	0	0	0	11
Uruguay	0	0	0	11
Paraguay	0	0	0	6
Portugalsko	0	0	0	6
Srí Lanka	0	0	0	5
Venezuela	0	0	0	1
Kuvajt	0	0	0	0

Vlastní soutěž proběhla 15. a 16. července. Organizace soutěže, jakož i podmínky pro práci jury a koordinaci byly vesměs výborné. Uvedeme nyní znění soutěžních úloh 39. MMO. Ke každé úloze připojujeme průměr vypočtený z bodových zisků všech 419 soutěžících.

Ú L O H Y 39. MMO

1. V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ jsou úhlopříčky AC a BD na sebe kolmé a protější strany AB a DC různoběžné. Předpokládejme, že bod P, v němž se protínají osy stran AB a DC, leží uvnitř $ABCD$. Dokažte, že $ABCD$ je tětivový, právě když trojúhelníky ABP a CDP mají stejný obsah.

Lucembursko (3,20)

2. V soutěži je a soutěžících a b soudců, kde $b \geqq 3$ je liché celé číslo. Každý soudce ohodnotí každého soutěžícího „uspěl“ či „neuspěl“. Nechť k je takové číslo, že se hodnocení libovolných dvou soudců shoduje nejvýše pro k soutěžících. Dokažte, že

$$\frac{k}{a} \geqq \frac{b-1}{2b}.$$

Indie (2,73)

3. Pro libovolné přirozené číslo n označme $d(n)$ počet všech kladných dělitelů čísla n (včetně 1 a n). Určete všechna přirozená čísla k taková, že

$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = k$$

pro vhodné n.

Bělorusko (1,70)

4. Určete všechny dvojice (a, b) kladných celých čísel takových, že $ab^2 + b + 7$ dělí číslo $a^2b + a + b$.

Velká Británie (3,49)

5. Označme I střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC a K, L, M po řadě body, v nichž se kružnice vepsaná dotýká jeho stran BC, CA a AB. Přímka, která prochází vrcholem B a je rovnoběžná s MK, protíná přímky LM a LK postupně v bodech R, S. Dokažte, že úhel RIS je ostrý.

Ukrajina (2,87)

6. Uvažujme všechny funkce f z množiny $\mathbb{N}$ všech přirozených čísel do sebe, jež splňují rovnost

$$f\bigl(t^2 f(s)\bigr) = s\bigl(f(t)\bigr)^2$$

pro všechna s a t v $\mathbb{N}$. Určete nejmenší možnou hodnotu $f(1998)$.

Bulharsko (0,65)

Vedoucím naší výpravy byl dr. *Karel Horák* z Matematického ústavu AV ČR, pedagogickým vedoucím družstva byl doc. *Jaromír Šimša* z brněnské pobočky téhož ústavu.

Na slavnostním zakončení olympiády vystoupil představitel Rumunska a pozval přítomné delegace k účasti na jubilejní 40. mezinárodní matematické olympiádě roku 1999 v Rumunsku (pravděpodobně v Bukurešti). Můžete tam reprezentovat Českou republiku i vy, pokud se ve školním roce 1998/99 zúčastníte 48. ročníku matematické olympiády a umístíte se na předním místě v celostátním kole kategorie A.

Dále už je rozhodnuto, že 41. MMO uspořádá Korejská republika (jižní Korea) v roce 2000, další pak USA, Filipíny a Japonsko. O uspořádání 45. MMO se ucházejí současně Írán, Řecko a Vietnam.

Karel Horák