Úlohy domácího kola kategorie A

1. *Najděte nejmenší přirozené číslo, které lze dostat doplněním závorek do výrazu*

$$15 : 14 : 13 : 12 : 11 : 10 : 9 : 8 : 7 : 6 : 5 : 4 : 3 : 2.$$

Řešení. Ať rozmístíme v daném výrazu závorky jakkoli, dostaneme po úpravě zlomek, v jehož čitateli bude číslo 15, zatímco ve jmenovateli bude 14 a součin zbylých čísel z množiny $\mathsf{S} = \{2, 3, \dots, 13\}$, která nejsou v čitateli. Pokud žádnou závorku nedoplníme, vyjde $\dfrac{15}{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot \ldots \cdot 2}$.

Snadno nahlédneme, že pro libovolnou podmnožinu $\mathsf{P} = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \subset \subset \mathsf{S}$, $\mathsf{Q} = \{a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_{13}\} = \mathsf{S} \setminus \mathsf{P}$, umíme v daném výrazu rozmístit závorky tak, aby vyšlo číslo

$$\frac{15}{14} \cdot \frac{a_1 a_2 \dots a_k}{a_{k+1} a_{k+2} \dots a_{13}},$$

resp. číslo $\dfrac{15}{14!}$, pokud $\mathsf{P} = \emptyset$.

Protože $15! = 2^{11} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$, můžeme každý podíl, který lze popsaným způsobem dostat, vyjádřit ve tvaru

$$\frac{2^{\alpha_2} \cdot 3^{\alpha_3} \cdot \ldots}{2^{\beta_2} \cdot 3^{\beta_3} \cdot \ldots,} \tag{1}$$

kde $\alpha_2 + \beta_2 = 11$, $\alpha_3 + \beta_3 = 6, \dots$. Nejmenší přirozené číslo, které lze vyjádřit ve tvaru (1), je $2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13$, protože uvedené prvočinitele vystupují v rozkladu čísla 15! s lichými mocninami. A poněvadž

$$\begin{aligned}
2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13 &= \frac{15 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 3}{14 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2} = \\
&= \frac{15}{\frac{14}{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10} \cdot \frac{9}{8 \cdot 7} \cdot 6 \cdot 5 \cdot \frac{4}{3}} = \\
&= 15 : (14 : 13 : 12 : 11 : 10) : (9 : 8 : 7) : 6 : 5 : (4 : 3) : 2,
\end{aligned}$$

je číslo $14\,300 = 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13$ řešením úlohy.

NÁVODNÁ ÚLOHA:
Žáci by si však měli uvědomit, co se stane, když do daného výrazu umístí *jednu* dvojici závorek, např.

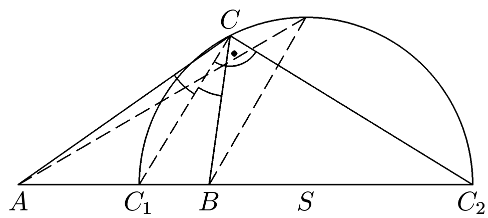
$$15 : 14 : 13 : (11 : \ldots : 8) : 7 : 6 : 5 : 4 : 3 : 2 =$$
$$= \frac{15}{14 \cdot 13 \cdot \frac{11}{10\cdot 9\cdot 8} \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{15 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{14 \cdot 13 \cdot \underline{11} \cdot 7},$$

tj. z každé takové dvojice závorek se první dělenec objeví ve jmenovateli, zatímco zbývající dělitelé se přesunou do čitatele výsledného zlomku.

2. *Najděte všechna kladná čísla k, pro něž platí: Ze všech trojúhelníků ABC, v nichž $|AB| = 5\,cm$ a $|AC| : |BC| = k$, má největší obsah trojúhelník rovnoramenný.*

ŘEŠENÍ. Pro $k = 1$ uvedené charakterizaci vyhovuje libovolný rovnoramenný trojúhelník s danou základnou AB a libovolně velkou výškou na stranu AB. Mezi nimi zřejmě neexistuje trojúhelník s největším obsahem.

Předpokládejme dále, že je $k > 1$ (jinak řešíme stejnou úlohu, v níž prohodíme A a B). Na přímce AB existují dva různé body C_1, C_2, pro které platí $\dfrac{|AC_1|}{|BC_1|} = \dfrac{|AC_2|}{|BC_2|} = k$. Všechny body C v rovině, pro které platí $|AC| : |BC| = k$, leží na Apolloniově kružnici sestrojené nad průměrem C_1C_2 (obr. 1). Odtud je zřejmé, že trojúhelník ABC bude mít největší obsah pro vrchol C ve středu oblouku C_1C_2 (v libovolné z polorovin určených přímkou AB). Za předpokladu $k > 1$ pro takto zvolený bod C platí $|AC| > |BC|$ a také $|AC| > |AS| > |AB|$, takže trojúhelník ABC bude rovnoramenný, právě když bude $|AB| = |BC|$. Odtud sestavíme rovnici pro odpovídající hodnotu k.



Obr. 1

Pro body C_1, C_2 především platí

$$|AC_1| = \frac{k}{k+1}|AB|, \qquad |AC_2| = \frac{1}{k+1}|AB|,$$

takže z rovností $|AC_2| = |AB| + |BC_2|$ a $|C_1C_2| = |BC_1| + |BC_2|$ vychází

$$|BC_2| = \frac{1}{k-1}|AB|, \qquad |C_1C_2| = \frac{2k}{k^2-1}|AB|.$$

Ještě spočteme

$$|BS| = \big||SC_1| - |BC_1|\big| = \left|\frac{k}{k^2-1} - \frac{1}{k+1}\right||AB| = \frac{1}{k^2-1}|AB|$$

a

$$|BC|^2 = |BS|^2 + |CS|^2 = |BS|^2 + |C_1S|^2 = \frac{1+k^2}{\left(k^2-1\right)^2}|AB|.$$

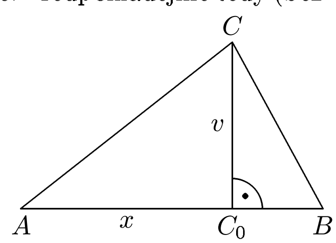
Odtud vychází rovnice

$$1 + k^2 = k^4 - 2k^2 + 1, \quad \text{neboli} \quad k^2\left(k^2-3\right) = 0,$$

která má jediné kladné řešení $k = \sqrt{3}$.

Úloze vyhovují dvě kladná čísla k, $k = \sqrt{3}$ a $k = 1/\sqrt{3}$.

Jiné řešení. Zřejmě $k \neq 1$ (pro $k = 1$ maximum neexistuje). Obě čísla k a $\dfrac{1}{k}$ zkoumanou vlastnost zároveň buď mají, nebo ne. Předpokládejme tedy (bez újmy na obecnosti), že $k > 1$ je pevné. Označme C_0 patu výšky z vrcholu C a $x = |AC_0|$ (obr. 2). Pro dané x spočítáme závislost $v = v(x)$, najdeme maximum této funkce a nakonec se podíváme, pro které $k > 1$ tomuto extrému odpovídá rovnoramenný trojúhelník.



Obr. 2

Zřejmě je

$$|AC|^2 = x^2 + v^2, \quad |BC|^2 = (x-c)^2 + v^2, \quad (1)$$

takže podmínka $|AC| = k|BC|$ je ekvivalentní rovnosti

$$x^2 + v^2 = k^2\left((x-c)^2 + v^2\right),$$

neboli po úpravě

$$v^2 = -x^2 + \frac{2k^2c}{k^2-1}\,x - \frac{k^2c^2}{k^2-1}.$$

Jak víme, nabývá nalezená kvadratická funkce maxima pro

$$x = \frac{k^2c}{k^2-1} > c$$

a té odpovídá maximální hodnota

$$v_{\max} = \frac{kc}{k^2-1}.$$

Protože vyšlo $x > c$, znamená to, že $|AC| > c$, takže trojúhelník ABC může být rovnoramenný, jedině když $|BC| = |BA| = c$. Dosazením do druhé rovnosti v (1) dostaneme

$$\left(\frac{k^2c}{k^2-1} - c\right)^2 + \frac{k^2c^2}{(k^2-1)^2} = \frac{c^2\left(k^2+1\right)}{(k^2-1)^2},$$

takže po úpravě máme pro $t = k^2$ kvadratickou rovnici

$$t + 1 = (t-1)^2,$$

která má jediný kladný kořen $t = 3$, odtud $k = \sqrt{3}$. Závěr je stejný jako v předchozím řešení.

NÁVODNÉ ÚLOHY:

1. V trojúhelníku ABC označme M průsečík osy vnitřního úhlu při vrcholu C se stranou AB. Potom je $|AM| : |BM| = |AC| : |BC|$. Dokažte.
2. Dokažte analogické tvrzení i pro osu vnějšího úhlu.
3. Sestrojte trojúhelník, v němž je dáno c, γ a $a : b$. [S. Horák: Kružnice. ŠMM sv. 16.]

3. *Pro která celá čísla a je maximum i minimum funkce*

$$y = \frac{12x^2 - 12ax}{x^2 + 36}$$

celé číslo?

ŘEŠENÍ. Budeme zjišťovat obor hodnot uvedené funkce, tj. pro která s existuje aspoň jedno x takové, že

$$y = \frac{12x^2 - 12ax}{x^2 + 36} = s.$$

Jednoduchou úpravou dostaneme rovnici

$$(s-12)x^2 + 12ax + 36s = 0, \tag{1}$$

která je kvadratická, pokud $s \neq 12$. Z rovnice plyne, že $s = 12$ patří do oboru hodnot, jen když $ax = 36$, tedy jen když $a \neq 0$. Pro $a = 0$ dostaneme pro x rovnici $x^2 = \dfrac{36s}{s-12}$, z níž vychází pro s nerovnost $0 \leqq s < 12$, takže obor hodnot nemá maximum.

Předpokládejme proto, že $a \neq 0$. V tomto případě je rovnice (1) kvadratická a reálné číslo s patří do oboru hodnot funkce y, právě když její diskriminant

$$D = 12^2a^2 - 4 \cdot 36s(s-12) = 12^2(a^2 - s^2 + 12s) \tag{1}$$

bude nezáporný, tj. právě když

$$6 - \sqrt{36 + a^2} \leqq s \leqq 6 + \sqrt{36 + a^2}.$$

Tím jsme určili maximum a minimum dané funkce. Pokud to mají být celá čísla, musí pro vhodné přirozené číslo b platit $36 + a^2 = b^2$, tedy $(b-a)(b+a) = 36$. Z každého rozkladu čísla 36 na součin dvou přirozených činitelů $36 = mn$ dostaneme $a = \frac{1}{2}(m-n)$, $b = \frac{1}{2}(m+n)$, což jsou celá čísla, jen když m a n mají stejnou paritu ($m \equiv n \pmod 2$), a protože $a \neq 0$, vyhovuje jedině $36 = 2 \cdot 18$, odkud $b = 10$, $a = \pm 8$.

4. *Označme $\tau(k)$ počet všech kladných dělitelů přirozeného čísla k a nechť číslo n je řešením rovnice $\tau(1{,}6n) = 1{,}6\tau(n)$. Určete hodnotu podílu $\tau(0{,}16n) : \tau(n)$.*

Řešení. Jestliže rozklad čísla n na prvočinitele je $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{s_i}$, kde $p_1, \dots, p_k$ jsou různá prvočísla a $s_1, \dots, s_k$ nezáporná celá čísla, platí pro počet jeho kladných dělitelů $\tau(n) = \prod_{i=1}^{k} (s_i+1)$. Jestliže $n = 2^\alpha 5^\beta n'$ kde $\beta \geqq 1$ a n' je nesoudělné s $2 \cdot 5$, můžeme danou rovnici přepsat jako

$$(\alpha + 4)\beta\tau(n') = \frac{8}{5}(\alpha+1)(\beta+1)\tau(n'),$$

což po úpravě dá rovnici

$$3\beta(\alpha - 4) + 8(\alpha + 1) = 3\beta(\alpha - 4) + 8(\alpha - 4) + 40 = (3\beta + 8)(\alpha - 4) + 40 = 0.$$

Odtud vychází, že

$$(3\beta + 8)(4 - \alpha) = 40 = 1 \cdot 40.$$

Ovšem vzhledem k tomu, že $3\beta + 8 \geqq 11$ a číslo $3\beta + 8$ dává při dělení třemi zbytek 2, vyhovuje ze všech rozkladů čísla 40 na součin jedině

$$3\beta + 8 = 20, \qquad 4 - \alpha = 2,$$

tedy $\alpha = 2$, $\beta = 4$, $n = 2^2 \cdot 5^4 n'$.

Pro podíl $\tau(0{,}16n) : \tau(n)$ tak vychází

$$\frac{\tau\left(\frac{4}{25}n\right)}{\tau(n)} = \frac{\tau(2^4 \cdot 5^2)}{\tau(2^2 \cdot 5^4)} = \frac{5 \cdot 3}{3 \cdot 5} = 1.$$

Návodné úlohy:

1. Dokažte, že $\tau(n)$ je tzv. multiplikativní funkce, tj. že pro nesoudělná přirozená čísla n_1, n_2 platí $\tau(n_1 \cdot n_2) = \tau(n_1)\tau(n_2)$.
2. Odvoďte vzoreček $\tau(n) = \prod_{i=1}^{k} (s_i + 1)$ pro počet dělitelů čísla n.

5. *Dokažte, že existuje trojúhelník ABC, v němž při obvyklém značení platí obě pythagorejské rovnosti $t_a^2 + t_b^2 = t_c^2$ a $v_a^2 + v_b^2 = v_c^2$. Dále ukažte, že pro vnitřní úhly takového trojúhelníku platí $|\alpha - \beta| = 90°$ a $\cos\gamma = \frac{2}{5}\sqrt{5}$.*

Řešení. Pro velikosti těžnic t_a, t_b, t_c trojúhelníku ABC platí rovnost

$$t_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2) \tag{1}$$

a další dvě, které dostaneme cyklickou záměnou. S jejich pomocí zjistíme, že první z daných rovností je ekvivalentní rovnosti

$$a^2 + b^2 = 5c^2. \tag{2}$$

Podobně ze vzorců $S = av_a = bv_b = cv_c$ pro obsah S trojúhelníku ABC dostaneme, že druhá rovnost je ekvivalentní rovnosti

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c^2}, \quad \text{neboli} \quad c^2(a^2 + b^2) = a^2b^2. \tag{3}$$

Pro $c = 1$ tak dostáváme soustavu rovnic $a^2 + b^2 = 5$, $a^2b^2 = 5$. Čísla a^2, b^2 jsou tedy kořeny kvadratické rovnice $t^2 - 5t + 5 = 0$. Ta má dva různé kladné kořeny, proto

$$\{a^2, b^2\} = \left\{\tfrac{1}{2}\left(5 + \sqrt{5}\right), \tfrac{1}{2}\left(5 - \sqrt{5}\right)\right\}. \tag{4}$$

Ukážeme, že pro odpovídající hodnoty a, b a $c = 1$ platí trojúhelníkové nerovnosti. Protože $ab = \sqrt{5}$, je

$$(a + b)^2 = (a^2 + b^2) + 2ab = 5 + 2\sqrt{5} > 1 = c^2,$$
$$(a - b)^2 = (a^2 + b^2) - 2ab = 5 - 2\sqrt{5} < 1 = c^2,$$

tj. $|a - b| < c < |a + b|$.

Tím je existence trojúhelníku ABC prokázána (je jediný až na podobnost a symetrii $A \leftrightarrow B$).

Pro jednoduchost dalších výpočtů položme i nadále $c = 1$. Z kosinové věty a ze vzorce (2) vypočteme

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - 1}{2ab} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{5}\sqrt{5}.$$

Podobně můžeme vypočíst i hodnoty $\cos\alpha$ a $\cos\beta$. S využitím rovností (2) a (3) vyjde

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{1 + b^2 - a^2}{2b} = \frac{1 + 2b^2 - (a^2 + b^2)}{2b} = b - \frac{2}{b},\\ \cos\beta &= \frac{1 + a^2 - b^2}{2a} = \frac{1 + 2a^2 - (a^2 + b^2)}{2a} = a - \frac{2}{a},\end{aligned}$$

a protože $|a^2 - b^2| = \sqrt{5}$, je jasné, že právě jedno z čísel $\cos\alpha$, $\cos\beta$ je záporné (jeden z úhlů α, β je tupý). Přitom

$$\begin{aligned}\cos^2\alpha &= \frac{4}{b^2} + b^2 - 4 = \frac{4}{5}a^2 + b^2 - 4 = 1 - \frac{1}{5}a^2,\\ \cos^2\beta &= \frac{4}{a^2} + a^2 - 4 = \frac{4}{5}b^2 + a^2 - 4 = 1 - \frac{1}{5}b^2,\end{aligned}$$

takže $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$, odkud plyne $\sin\alpha = |\cos\beta|$ a $\sin\beta = |\cos\alpha|$. Vzhledem k nerovnosti $\cos\alpha\cos\beta < 0$ to znamená, že

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = 0,$$

tedy $\alpha - \beta = 90°$.

Pokud se rozhodneme rovnou využít spočtené hodnoty (4) (když budeme předpokládat, že $a > b$, bude $\cos\alpha < 0$), vyjde po chvilce počítání

$$\cos^2\alpha = \frac{5 - \sqrt{5}}{10}, \quad \cos^2\beta = \frac{5 + \sqrt{5}}{10},$$

odkud už je vidět, že $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$.

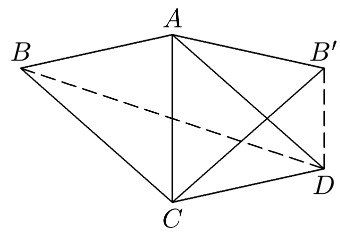
NÁVODNÉ ÚLOHY:

1. Odvoďte rovnost (1). [Napište kosinovou větu pro stranu c v trojúhelníku ABC a pro stranu t_a v trojúhelníku ABA_0 (A_0 je střed strany BC.]
2. Napište kvadratickou rovnici, znáte-li součet jejích kořenů a součet jejich druhých mocnin. [Jsou-li α, β oba kořeny, je $\alpha\beta = \frac{1}{2}[(\alpha + \beta)^2 - (\alpha^2 + \beta^2)]$, hledaná rovnice je $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$.]

6. *Z papíru byl slepen model čtyřstěnu, jehož každé dvě protilehlé hrany jsou shodné. Rozhodněte, zda můžeme model rozříznout podél tří úseček tak, aby ho pak bylo možno rozvinout do roviny a vznikl přitom obdélník. Existují pro pravidelný čtyřstěn dva uvažované způsoby rozřezání, při nichž vzniknou neshodné obdélníky?*

Řešení. Nejprve si uvědomíme, že čtyřstěn nelze rozvinout do roviny, nebude-li některý z vrcholů krajním bodem jedné z úseček. Protože čtyřstěn má celkem čtyři vrcholy, musí jedna ze tří úseček obsahovat dva z vrcholů, tedy čtyřstěn musíme rozříznout podle jedné z jeho hran.

Rozebereme postupně několik možností, jak zvolit další dvě úsečky. Ale ještě předtím si uvědomíme, že čtyřstěn $ABCD$, jehož protilehlé hrany jsou shodné, má navzájem shodné stěny tvořené ostroúhlým trojúhelníkem. To je vidět, když sklopíme dvě jeho sousední stěny (např. ty se společnou hranou AC) do roviny (obr. 3). Je totiž jasné, že délka úsečky BD není nikdy menší než vzdálenost kolmých průmětů B_1, D_1 vrcholů B, D na přímku AC — největší bude, pokud stěny sklopíme do opačných polorovin určených přímkou AC, a nejmenší, pokud je sklopíme do téže poloroviny. Pokud by tedy byl např. úhel BAC pravý nebo tupý, bylo by ve čtyřstěnu, pro jehož hrany platí $|AD| = |BC|$ a $|AB| = |CD|$, vždy $|BD| > |AC|$.



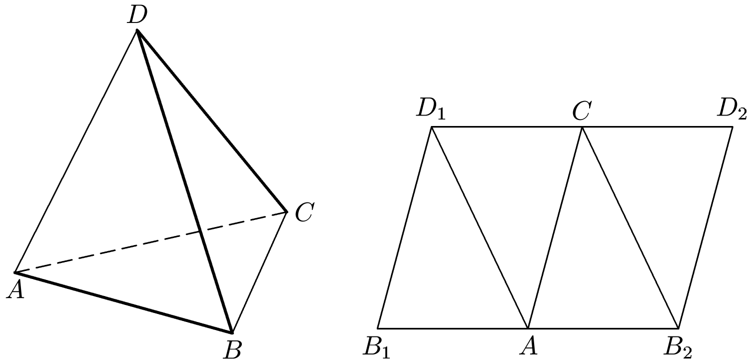
Obr. 3

Předpokládejme, že jsme čtyřstěn $ABCD$ rozřízli podél hrany AB.

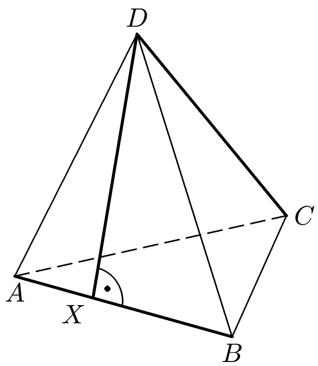
1. Rozřízněme čtyřstěn $ABCD$ podél sousední hrany BC. Protože úhel při vrcholu B v trojúhelníku ABC je ostrý, nemůžeme po dalším řezu a případném rozvinutí do roviny nikdy dostat pravoúhelník.

2. Rozřízněme čtyřstěn $ABCD$ podél protilehlé hrany CD. Je jasné, že třetí úsečka musí vycházet z jednoho z vrcholů, protože jinak se nám nepodaří okolí žádného z vrcholů rozvinout do roviny. Pokud teď čtyřstěn rozřízneme podél další hrany, dostaneme sice jeho síť, kterou tvoří rovnoběžník (obr. 4), ale protože dvě z těchto tří hran jsou sousední, nemůže to být pravoúhelník (viz 1). Vedeme-li však řez řekněme z vrcholu D na hranu AB (jinak trojhrany při vrcholech A a B neuvolníme, obr. 5) a bude-li zároveň úsečka DX řezu výškou ve stěně ABD, dostaneme po rozvinutí do roviny obdélník, jak je zřejmé, zakreslíme-li řez do původní sítě (obr. 6).

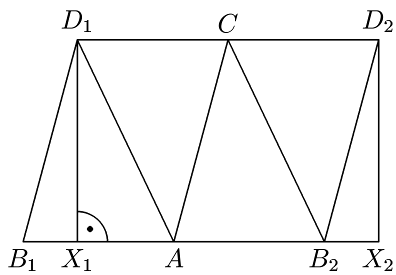
3. Pokud rozřízneme jedině hranu AB, musí z každého ze zbývajících vrcholů C, D vycházet jedna z úseček řezu. Probereme-li jednotlivé možnosti, snadno zjistíme, že se nám podaří uvažovaný čtyřstěn rozvinout jedině tehdy, budou-li končit oba řezy na hraně AB. A protože chceme po rozvinutí dostat



Obr. 4



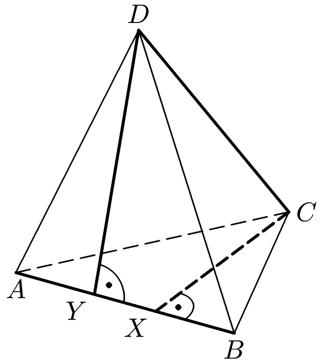
Obr. 5



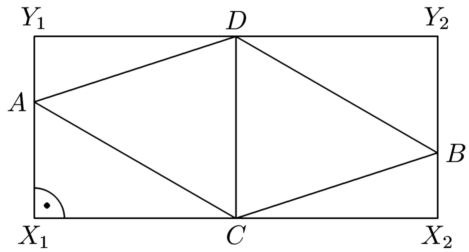
Obr. 6

obdélník, můžeme předpokládat, že CX i DY jsou stěnové výšky (obr. 7). Potom $|BX| = |AY|$ a $|BY| = |AX|$ a po rozvinutí pak skutečně dostaneme obdélník (obr. 8) složený ze dvou shodných stěn ACD, BCD se společnou hranou CD a z pravoúhlých trojúhelníků ADY, ACX, BCX, BDY se shodnými odvěsnami CX a DY.

Získali jsme dva způsoby, jak daný čtyřstěn rozříznout tak, že po rozvinutí do roviny vznikne obdélník. Přitom je zřejmé, že oba vzniklé obdélníky budou shodné, právě když pro výšku CX trojúhelníku ABC platí $|CX| = |AB|$. Protože v případě rovnostranného trojúhelníku je $|CX| < |AB|$, dostaneme pro pravidelný čtyřstěn dva neshodné obdélníky.



Obr. 7



Obr. 8

NÁVODNÉ ÚLOHY:

1. Existuje těleso, jehož sítí je
   a) rovnostranný trojúhelník,
   b) čtverec?

   [F. Kuřina: Umění vidět v matematice, str. 229.]
2. Existuje celkem 11 neshodných sítí téže krychle. Nakreslete je.
3. List tvaru obdélníku 1,5 cm × 4 cm rozřežte podél jedné lomené čáry na dva díly tak, aby jimi bylo možné obalit krychli o hraně délky 1 cm.
4. Čtyřstěn, jehož protilehlé hrany jsou shodné, má navzájem shodné stěny tvořené ostroúhlým trojúhelníkem. Dokažte. [S. Horák: Mnohostěny. ŠMM sv. 27.]
5. Zkuste dokázat, že pro velikosti stěnových úhlů při společném vrcholu libovolného čtyřstěnu platí trojúhelníková nerovnost.
6. Na základě předchozího tvrzení dokažte, že stěna čtyřstěnu, jehož protilehlé hrany jsou shodné, je ostroúhlý trojúhelník.
7. Existuje čtyřstěn, jehož síť je tvořena čtyřmi shodnými trojúhelníky určenými středními příčkami daného tupoúhlého trojúhelníku?