Úlohy domácího kola kategorie B

1. *Na louce jsou děti i dospělí. Počet procent chlapců ze všech dětí se rovná počtu procent dívek ze všech přítomných osob a také počtu všech dospělých. Kolik chlapců, dívek a dospělých je na louce?*

Řešení. Označme po řadě c, d a v počet chlapců, dívek a dospělých na louce. Platí
$$\frac{100c}{c+d}=\frac{100d}{c+d+v}=v.$$
Z první rovnosti plyne $d^2=c^2+vc$, což dosadíme do rovnosti mezi prvním a třetím výrazem, kterou předem upravíme do tvaru $vd=(100-v)c$ a umocníme na druhou. Po úpravě dostaneme
$$v^3=200c(50-v).$$
Odtud plyne, že v je dělitelné 10 a $v<50$. Vyzkoušením všech čtyř možností ($v=10$, $v=20$, $v=30$, $v=40$) zjistíme, že celé c dostaneme jedině pro $v=40$. Potom $c=32$, $d=48$.

Na louce je 32 chlapců, 48 dívek a 40 dospělých.

Návodné úlohy:

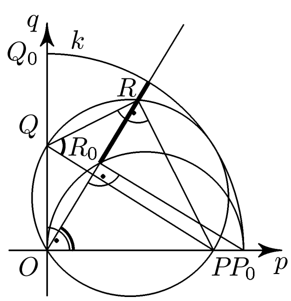
1. Určete všechny dvojice prvočísel p, q, která splňují rovnici $3p^2+p=q^2+3q$. [34. roč. MO, C–II–3a]
2. Která přirozená čísla x, y, z splňují soustavu rovnic
$$x+y=z^2,$$
$$10x+y=z^3?$$
[41. roč. MO, C–S–2]
3. Najděte všechny trojice přirozených čísel x, y, z tak, aby zároveň platilo
$$x^3+y^3+z^5=1\,979,$$
$$y^2z=x.$$
[29. roč. MO, B–I–6]

2. *Uvažujme shodné polokružnice, které leží v daném pravém úhlu a jejichž koncové body leží každý na jiném jeho rameni. Určete množinu, kterou vyplní body všech těchto polokružnic.*

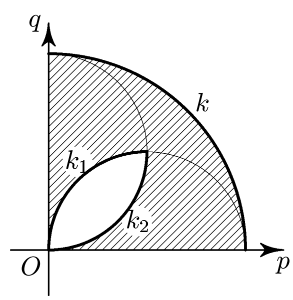
Řešení. Označme p, q ramena daného pravého úhlu, O jeho vrchol, P, Q příslušně koncové body průměru uvažované polokružnice a $|PQ| = 2r$. Zvolme pevně vnitřní bod R polokružnice a zkoumejme, jaký útvar body R vyplní. Trojúhelníky QPR a PQO jsou pravoúhlé, proto body O, P, Q, R leží na jedné kružnici (obr. 1). Odtud podle věty o obvodových úhlech plyne, že

$$|\sphericalangle RQP| = |\sphericalangle ROP|.$$

Jelikož je $|\sphericalangle RQP|$ pro pevný bod R konstantní, leží bod R na polopřímce s počátkem O, která svírá s polopřímkou p úhel o velikosti $|\sphericalangle RQP|$.



Obr. 1



Obr. 2

Pro vzdálenost $|OR|$ zřejmě platí $|OR| \leqq |PQ|$, protože OR je tětiva kružnice s průměrem PQ.

Vzhledem k tomu, že hledaná množina je zřejmě souměrná podle osy daného pravého úhlu, stačí vyšetřit případ, kdy $|\sphericalangle POR| \geqq 45°$. V tomto případě je $|\sphericalangle RQO| \geqq 90°$, takže $|OR| \geqq |QR|$. Označme P_0 bod polopřímky OP, pro který $|OP_0| = |PQ|$, R_0 jeho kolmý průmět na polopřímku OR (obr. 1). Protože trojúhelníky OP_0R_0 a QPR jsou shodné pravoúhlé trojúhelníky, je $|OR_0| = |QR|$. Pro vzdálenost $|OR|$ tedy platí $|OR_0| \leqq |OR| \leqq 2r$. Bod R tedy leží v té části polopřímky OR, která je omezena kružnicí k_1 nad průměrem OP_0 a čtvrtkružnicí k se středem O a poloměrem OP_0. Analogicky pro $|\sphericalangle POR| \leqq 45°$ vyjde, že hledané body R leží v části polopřímky OR, která je omezena kružnicí k_2 nad průměrem OQ_0 a čtvrtkružnicí k.

Zbývá ukázat, že celá množina vyšrafovaná na obr. 2 je hledanou množinou bodů R. K tomu stačí si uvědomit, že pokud bod R leží uvnitř čtvrtkružnice k a vně aspoň jedné z kružnic k_1, k_2, existuje aspoň jedna (případně dvě, leží-li bod vně obou kružnic k_1, k_2) kružnice s daným průměrem $2r$ procházející body O a R, jejíž střed leží uvnitř útvaru omezeného polopřímkami p, q a čtvrtkružnicí k. Tato kružnice se bude vnitřně dotýkat k a protne každou z úseček OP_0, OQ_0. Uvedené průsečíky budou krajními body hledané polokružnice obsahující uvažovaný bod R.

Závěr: Hledanou množinou bodů je útvar (včetně své hranice) vyšrafovaný na obr. 2, tj. čtvrtkruh se středem O a poloměrem $2r$ bez vnitřku „čočky“ omezené dvěma čtvrtkružnicemi o poloměru r.

NÁVODNÉ ÚLOHY:

1. Dokažte, že součet protějších vnitřních úhlů v konvexním čtyřúhelníku, jemuž lze opsat kružnici, je $180°$.
2. Určete množinu středů všech úseček konstantní délky d, jejichž jeden konec se pohybuje po jedné a druhý konec po druhé ze dvou vzájemně kolmých přímek. [Kružnice se středem v průsečíku přímek a poloměrem $\frac{1}{2}d$.]
3. Uvnitř pravého úhlu je dán bod B. Sestrojte polokružnici s daným průměrem d, která prochází bodem B, jeden její koncový bod leží na jednom rameni a druhý na druhém rameni pravého úhlu.
4. V rovině je dána úsečka AB. V jedné z polorovin vyťatých přímkou AB uvažujme všechny pravoúhlé trojúhelníky ABC s přeponou AB. Označme X patu kolmice vedené bodem B na osu úhlu BCA. Dokažte, že osy všech takových úhlů BCA procházejí pevným bodem, a vyšetřete množinu všech bodů X. [21. roč. MO, C–P–3]
5. Je dán rovnostranný trojúhelník PQR. Určete množinu všech vrcholů A takových trojúhelníků ABC, jejichž strany AB, BC, CA obsahují v uvedeném pořadí vrcholy P, Q, R, a pro délky jejich stran platí $|AB| \geqq |AC| \geqq |BC|$. [21. roč. MO, C–II–1a]
6. Je dána kružnice k s průměrem AB. Na kružnici k zvolíme bod $X \neq A, B$ a na polopřímce AX sestrojíme bod Y tak, aby platilo $|AY| = |AX| + |XB|$. Vyšetřete množinu středů úseček AY pro všechny takové body X. [24. roč. MO, C–P–3]

3. *Najděte všechna trojmístná čísla v desítkové soustavě, která se rovnají třetině čísla s týmž zápisem v jiné číselné soustavě.*

ŘEŠENÍ. Hledané číslo v desítkové soustavě má tvar

$$100A + 10B + C, \quad A, B, C \in \{0, 1, \ldots, 9\},\ A \neq 0.$$

Je-li z neznámý základ jiné číselné soustavy, má podle podmínky úlohy platit

$$100A + 10B + C = \frac{1}{3}(Az^2 + Bz + C),$$

odkud dostáváme rovnici

$$A(z^2 - 300) = B(30 - z) + 2C.$$

Zřejmě je $z \geqq 18$, neboť $17^2 < 300$. Rozeberme jednotlivé případy:

Je-li $z = 18$, je $12A = 6B + C$. Řešením jsou tyto trojice (A, B, C): $(1, 2, 0)$, $(1, 1, 6)$, $(2, 4, 0)$, $(2, 3, 6)$, $(3, 6, 0)$, $(3, 5, 6)$, $(4, 8, 0)$, $(4, 7, 6)$, $(5, 9, 6)$.

Je-li $z = 19$, je $61A = 11B + 2C$. Řešením je trojice $(A, B, C) = (1, 5, 3)$.

Je-li $z = 20$, je $50A = 5B + C$. Řešením je trojice $(A, B, C) = (1, 9, 5)$.

Pro $z \geqq 21$ už rovnost nenastane pro žádnou trojici (A, B, C), neboť levá strana rovnice je vždy větší nebo rovna 141 a pravá strana je vždy menší nebo rovna 99.

Celkem vyhovuje 11 čísel: 116, 120, 153, 195, 236, 240, 356, 360, 476, 480 a 596.

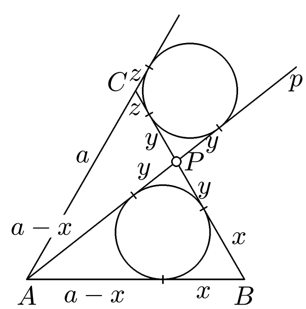
NÁVODNÉ ÚLOHY:

1. Vyjádřete dekadické číslo 1 998 v číselné soustavě dvojkové, trojkové, ..., šestnáctkové. [11111001110, 2202000, 133032, 30443, 13130, 5553, 3716, 2660, 1998, 1557, 11A6, BA9, A2A, 8D3, 7CE — znaky A, B, C, D, E, F znamenají postupně čísla 10, 11, 12, 13, 14, 15.]
2. Ve které číselné soustavě platí $42 \cdot 31 = 1522$? [V osmičkové.]
3. Pro které základy z, u platí rovnost $(53)_z = (35)_u$? (Symbol $(53)_z$ znamená číslo, jež je v číselné soustavě o základu z zapsáno jako 53.) [Vyhovuje nekonečně mnoho dvojic (z, u): $(7, 11)$, $(10, 16)$, $(13, 21)$, ..., obecně $z = 3k + 1$, $u = 5k + 1$, $k \geqq 2$.]
4. Co se stane s číslem napsaným v dvojkové číselné soustavě, jestliže za poslední číslici připíšeme a) nulu, b) dvě nuly? [Číslo se a) zdvojnásobí, b) stane čtyřnásobkem.]
5. Je-li $z > 2$ základ číselné soustavy, pak čísla $(z-1)^2$, $2(z-1)$ napsaná v této soustavě mají vždy obrácený sled cifer. Dokažte. [Návod: Obě čísla jsou dvojciferná s číslicemi 1 a $z - 2$.]

4. *Je dán rovnostranný trojúhelník ABC. Na straně BC najděte bod P tak, aby kružnice vepsaná trojúhelníku ABP a kružnice připsaná straně PC trojúhelníku APC byly shodné.*

ŘEŠENÍ. Nechť a značí délku strany rovnostranného trojúhelníku ABC. Dále označme délky úseků tečen z bodů A, B, C a P k oběma uvažovaným kružnicím stejně jako na obr. 3. Poloměry obou shodných kružnic označme r. Z obrázku je patrné, že platí

$$a + z = a - x + 2y, \qquad \text{odkud} \qquad x + z = 2y. \tag{1}$$



Obr. 3

Při vyjádření délky a strany BC obdržíme dále

$$x + 2y + z = a. \tag{2}$$

Ze vztahů (1) a (2) bezprostředně plyne

$$x + z = 2y = \frac{a}{2}, \qquad \text{tedy} \qquad y = \frac{a}{4}.$$

Dále vidíme, že platí dvojice vztahů

$$x = r \operatorname{cotg} 30^\circ = r\sqrt{3} \qquad \text{a} \qquad z = r \operatorname{cotg} 60^\circ = r\frac{\sqrt{3}}{3},$$

z nichž plyne

$$x = 3z. \tag{3}$$

Dosazením (3) do (2) dostaneme po snadné úpravě

$$\frac{a}{2} = x + z = 3z + z = 4z, \qquad \text{odkud} \qquad z = \frac{a}{8}.$$

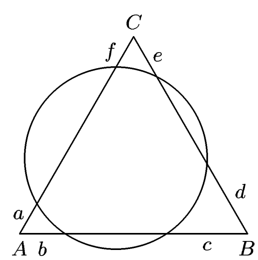
Celkově tedy

$$|BP| = x + y = 3z + y = \frac{3}{8}a + \frac{1}{4}a = \frac{5}{8}a, \quad |CP| = a - |BP| = \frac{3}{8}a.$$

Odtud již okamžitě plyne konstrukce bodu P.

NÁVODNÉ ÚLOHY:

1. Konvexnímu čtyřúhelníku $ABCD$ lze vepsat kružnici, právě když pro jeho strany a, b, c, d platí $a + c = b + d$. Dokažte.
2. Určete délky stran pravoúhlého trojúhelníku ABC, je-li poloměr jeho opsané kružnice $r = 5\,\text{cm}$ a poloměr jeho vepsané kružnice $\varrho = 2\,\text{cm}$. [6 cm, 8 cm, 10 cm.]
3. Kružnice vepsaná trojúhelníku ABC se dotýká strany AB v bodě U, kružnice vně připsaná straně AB se jí dotýká v bodě V. Dokažte, že při obvyklém značení platí:
$$|AU| : |BU| = \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} : \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}, \quad |AV| : |BV| = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} : \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}.$$
4. Vzájemná poloha rovnostranného trojúhelníku ABC a kružnice k je znázorněna na obr. 4. Dokažte, že pro vyznačené délky platí
$$a + c + e = b + d + f.$$



Obr. 4

5. V trojúhelníku ABC je sestrojena těžnice CC_1 a do trojúhelníků ACC_1 a BCC_1 jsou vepsány kružnice. Dokažte, že vzdálenost dotykových bodů těchto kružnic s těžnicí CC_1 je (při obvyklém označení stran trojúhelníku) $\frac{1}{2}(a - b)$.
6. Do lichoběžníku $ABCD$ ($AB \parallel CD$) jsou vepsány kružnice k_1, k_2, které se v uvedeném pořadí dotýkají stran a, c, d, resp. a, c, b. Jestliže pro délky stran lichoběžníku platí $a + c > b + d$ a jeho výška má délku $\frac{1}{2}(a + c - b - d)$, pak mají kružnice k_1, k_2 vnější dotyk. Dokažte. [28. roč. MO, C–P–3]

5. *Z koule o poloměru R je oddělena kulová úseč o výšce v ($v < R$). Této úseči je vepsána koule K o poloměru $\frac{1}{2}v$. Dále je do úseče vepsáno osm shodných menších koulí, z nichž každá se dotýká koule K. Žádné dvě z nich nemají společný vnitřní bod a každá z nich se dotýká právě dvou ostatních. Určete poměr $v : R$.*

Řešení. Označme S střed koule, z níž je úseč odříznuta, O střed koule K a Q střed jedné menší vepsané koule o poloměru r. Patu kolmice z bodu Q na přímku SO označme P. Obr. 5 představuje řez útvaru rovinou SOQ. Pro vyznačené úsečky platí

$$|QO| = \frac{v}{2} + r,\ |PO| = \frac{v}{2} - r,\ |QS| = R - r,\ |PS| = R + r - v.$$

Z pravoúhlých trojúhelníků OQP a QSP plynou rovnosti

$$\left(\frac{v}{2} + r\right)^2 - \left(\frac{v}{2} - r\right)^2 = |QP|^2 = (R - r)^2 - (R + r - v)^2,$$

odkud

$$|PQ|^2 = 2rv, \quad r = \frac{2Rv - v^2}{4R}. \tag{1}$$

Vzdálenost středu každé menší koule je od osy úseče je $|PQ|$, vzdálenost středů Q_1, Q_2 dvou sousedních menších koulí je $2r$. Použijeme-li kosinovou větu na trojúhelník Q_1Q_2P, dostaneme (obr. 6)

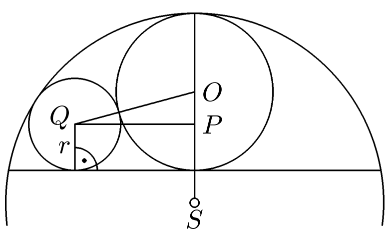
$$\cos\varphi = \frac{2|QP|^2 - 4r^2}{2|QP|^2} = 1 - \frac{r}{v}. \tag{2}$$

Jelikož menších koulí má být osm, je $\varphi = 45°$ a $\cos\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. vyjádříme-li z druhé rovnosti v (1)

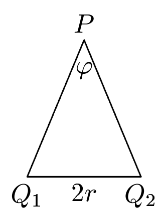
$$\frac{r}{v} = \frac{2R - v}{4R} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\frac{v}{R},$$

plyne odtud podle (2)

$$\frac{v}{R} = 2\left(1 - 2\frac{r}{v}\right) = 2\bigl(2\cos\varphi - 1\bigr) = 2\bigl(\sqrt{2} - 1\bigr).$$



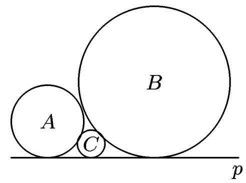
Obr. 5



Obr. 6

NÁVODNÉ ÚLOHY:

1. Do polokružnice k_1 o průměru $2R$ je vepsána kružnice k_2 o průměru R. Vypočtěte poloměr kružnice k_3, která se dotýká vně kružnice k_2 a zevnitř polokružnice k_1 i jejího průměru. [$\frac{1}{4}R$. Viz též 38. roč. MO, C–II–2.]
2. Do mezikruží o vnitřním poloměru r a vnějším poloměru R je vepsáno n kružnic „za sebou" tak, že se každé dvě sousední dotýkají. Určete vztah mezi r, R a n. [$\dfrac{R}{r} = \dfrac{1+\sin\frac{\pi}{n}}{1-\sin\frac{\pi}{n}}$]
3. Kružnice se středy A, B, C a poloměry a, b, c se dotýkají navzájem i přímky p podle obr. 7. Vyjádřete poloměr c pomocí poloměrů a, b. [$c = \frac{ab}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}$]
4. Dvě koule $k_1(A, a)$, $k_2(B, b)$ se vně dotýkají a obě se ještě dotýkají roviny α. Určete poloměr koule $k_3(C, c)$, která se vně dotýká koulí k_1 a k_2 a roviny α, přičemž rovina ABC je kolmá na rovinu α. [Řešení: Stejné jako v úloze 3.]



Obr. 7

6. *Najděte všechny možné hodnoty součtu $x + y$, kde reálná čísla x, y splňují rovnost $x^3 + y^3 = 3xy$.*

ŘEŠENÍ. Hledáme vlastně všechny ty hodnoty parametru s, pro něž má soustava rovnic

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= 3xy, \\ x + y &= s \end{aligned}$$

řešení v oboru reálných čísel. Z druhé rovnice vyjádříme $y = s - x$ a dosadíme do první rovnice, kterou budeme řešit vzhledem k neznámé x:

$$\begin{aligned} x^3 + (s-x)^3 &= 3x(s-x), \\ x^3 + s^3 - 3s^2x + 3sx^2 - x^3 &= 3sx - 3x^2, \\ 3(s+1)x^2 - 3s(s+1)x + s^3 &= 0. \end{aligned}$$

Tato rovnice zřejmě nemá řešení pro $s = -1$. Pro $s \neq -1$ jde o kvadratickou rovnici, která má v oboru reálných čísel řešení, právě když je její diskriminant D nezáporný. Výpočtem

$$D = 9s^2(s+1)^2 - 12(s+1)s^3 = 3s^2(s+1)(3-s)$$

zjišťujeme, že $D \geqq 0$, právě když $-1 \leqq s \leqq 3$, což spolu s podmínkou $s \neq -1$ dává hledanou množinu možných hodnot součtů s: je to polouzavřený interval $(-1, 3\rangle$.

Zpětně je vidět, že pro každé s z intervalu $(-1, 3\rangle$ existuje číslo x, jež je kořenem výše uvedené kvadratické rovnice, a že toto čísla x a odpovídající hodnota $y = s - x$ splňují rovnici $x^3 + y^3 = 3xy$.

Pro úplnost vypočtěme ta čísla x, y, jež jsou pro libovolné $s \in (-1, 3\rangle$ řešením uvažované soustavy:

$$x_{1,2} = \frac{3s(s+1) \pm s\sqrt{3(s+1)(3-s)}}{6(s+1)} = \frac{s}{2} \pm s\sqrt{\frac{3-s}{12(s+1)}}.$$

Po dosazení do $y = s - x$ zjišťujeme, že danému s přísluší dvě dvojice

$$[x, y] = \left\{\frac{s}{2} + s\sqrt{\frac{3-s}{12(s+1)}}, \frac{s}{2} - s\sqrt{\frac{3-s}{12(s+1)}}\right\}$$

či

$$[x, y] = \left\{\frac{s}{2} - s\sqrt{\frac{3-s}{12(s+1)}}, \frac{s}{2} + s\sqrt{\frac{3-s}{12(s+1)}}\right\}.$$

Rovnost $x^3 + y^3 = 3xy$ lze pro nalezená x a y buď ověřit dosazením a přímým výpočtem, nebo pomocí Viètových vzorců pro kořeny uvedené kvadratické rovnice

$$x + y = s, \quad xy = \frac{s^3}{3(s+1)},$$

podle kterých

$$x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = s^3 - 3s\,\frac{s^3}{3(s+1)} = \frac{s^3}{s+1} = 3xy.$$

Návodné úlohy:

1. Dokažte, že pro všechna reálná čísla x, y platí
   a) $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$,
   b) $x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$.
2. Určete reálná čísla x, y, pro něž platí $x + y = b$, $xy = c$, kde b, c jsou reálné parametry. [Je-li $D = b^2 - 4c > 0$, je $[x, y] = [\frac{1}{2}(b + \sqrt{D}), \frac{1}{2}(b - \sqrt{D})]$ nebo $[x, y] = [\frac{1}{2}(b - \sqrt{D}), \frac{1}{2}(b + \sqrt{D})]$; je-li $D = 0$, je $x = y = \frac{1}{2}b$; je-li $D < 0$, hledaná reálná čísla x, y neexistují.]
3. Dokažte, že pro každé reálné číslo x platí nerovnosti
$$\frac{2}{3} \leqq \frac{x^2 + 1}{x^2 - x + 1} \leqq 2.$$
4. Jestliže pro reálná čísla a, b, c platí
$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0,$$
potom buď $a + b + c = 0$, nebo $a = b = c$. Dokažte. [18. roč. MO, B–I–1]
5. Je dána soustava rovnic
$$\begin{aligned} x + y + z &= 1, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= c, \\ xy &= z^2. \end{aligned}$$
Udejte podmínky pro reálné číslo c, aby soustava měla reálné řešení x, y, z. [11. roč. MO, B–I–5]