Úlohy domácího kola kategorie C

1. *Je dáno čtyřmístné číslo (v desítkové soustavě). Změnou pořadí jeho číslic lze sestavit právě osm dalších čtyřmístných čísel. Součet nejmenších tří ze všech těchto devíti čísel je* 12 528. *Určete číslice daného čísla.*

Řešení. Nejprve zjistíme, kolik čtyřciferných čísel je možné sestavit z pevně zvolené čtveřice číslic. V dalších úvahách budeme nenulové cifry značit malými písmeny. Různá písmena nikdy neoznačují tutéž číslici, symbol 0 značí nulu.

Čtveřice číslic a, a, a, a a a, 0, 0, 0 určují každá jen jedno čtyřciferné číslo, cifry a, a, a, 0 tři: $a\,aa0$, $a\,a0a$, $a\,0aa$. Z číslic a, a, a, b ($a \neq b$) je možné sestavit pouze čtyři čtyřciferná čísla: $a\,aab$, $a\,aba$, $a\,baa$, $b\,aaa$.

Z cifer a, a, 0, 0 sestavíme jen tři čísla $a\,a00$, $a\,0a0$, $a\,00a$. Pro cifry a, a, b, b ($a \neq b$) máme celkem šest možností: $a\,abb$, $a\,bab$, $a\,bba$, $b\,aab$, $b\,aba$, $b\,baa$. To je pořád málo.

Číslice a, a, b, 0 určují právě devět čísel: $a\,ab0$, $a\,a0b$, $a\,ba0$, $a\,b0a$, $a\,0ab$, $a\,0ba$, $b\,aa0$, $b\,a0a$, $b\,0aa$. Analogickým postupem zjistíme, že vyšetřování dalších možností již k počtu 9 nevede. Přehled všech možných výsledků je uveden v následující tabulce.

Typ	$a\,000$	$a\,aaa$	$a\,aa0$	$a\,aab$	$a\,a00$	$a\,abb$	$a\,ab0$	$a\,b00$	$a\,abc$	$a\,bc0$	$a\,bcd$
Počet	1	1	3	4	3	6	9	6	12	18	24

Dané číslo má tedy cifry a, a, b, 0, kde a, b jsou různé nenulové číslice.

Rozlišme dvě situace a zapišme v každé z nich písemné sčítání tří nejmenších čísel:

$$\begin{array}{ccc} \text{I.}\quad a<b & \qquad & \text{II.}\quad a>b \\ \begin{array}{r} a\,0ab \\ a\,0ba \\ a\,a0b \\ \hline 12\,528 \end{array} & & \begin{array}{r} b\,0aa \\ b\,a0a \\ b\,aa0 \\ \hline 12\,528 \end{array} \end{array}$$

V případě I je z levých dvou sloupců zřejmé, že $a = 4$, a z pravého sloupce obdržíme $2b + 4 = 8$ nebo $2b + 4 = 18$. Podmínce $a < b$ vyhovuje jen $b = 7$. Snadno se přesvědčíme, že cifry $a = 4$ a $b = 7$ jsou řešením úlohy.

Ve II. případě je z pravých dvou sloupců vidět, že číslo $2a$ má poslední číslici 8 a zároveň 2 nebo 1. To však není možné.

Jiná možnost vyřešení situace I: Naznačený součet můžeme přepsat ve tvaru $3\,000a + 100a + 10(a+b) + a + 2b = 12\,528$. Úpravou snadno zjistíme, že $a = 4 + \dfrac{28-4b}{1\,037}$. Z podmínky, že poslední zlomek je celé číslo k, vyjde $b = 7 - \dfrac{1\,037k}{4}$, $a = 4 + k$. Je zřejmé, že a, b budou číslice jen pro $k = 0$. Analogicky lze postupovat i v případě II.

Závěr: Číslice hledaného čísla jsou 4, 4, 7 a 0.

NÁVODNÉ ÚLOHY:

1. Určete počet všech čtyřmístných čísel, jejichž zápisy obsahují
   a) dvě dvojky a dvě pětky,
   b) jednu nulu, jednu trojku a dvě dvojky,
   c) jednu pětku, jednu sedmičku a dvě dvojky,
   d) právě po jedné z číslic 0, 2, 3, 4.
2. Čtyřmístné číslo $ABCD$ je druhou mocninou jiného přirozeného čísla. Známe jen jeho třetí číslici $C = 0$. Dále o něm víme, že $A = B + D$. Které je to číslo? [9 801, viz Novoveský, Križalkovič, Lečko: Zábavná matematika, úl. 5.17.]
3. Nahraďte písmena číslicemi: $RE + MI = FA$, $DO + SI = MI$, $LA + SI = SOL$. [$DO\,REM\,IFA\,SOL = 40\,275\,683\,109$, L. P. Močalov: Hlavolamy, úl. 1.36.]
4. Určete číslice a, b tak, aby číslo, jež je v desítkové soustavě zapsáno ve tvaru $a0b5$, bylo druhou mocninou přirozeného čísla. [39. roč. MO, C–S–2.]

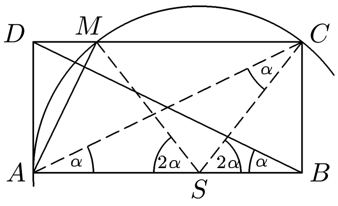
2. *V obdélníku $ABCD$ platí $|AB| > |BC|$. Oblouk AC kružnice, jejíž střed leží na straně AB, protíná stranu CD v bodě M. Dokažte, že přímky AM a BD jsou navzájem kolmé.*

ŘEŠENÍ. Označme S střed dané kružnice a α velikost úhlu CAB, $\alpha < 45°$ (obr. 1). Pak také $|\sphericalangle SAC| = |\sphericalangle SCA| = \alpha$, neboť trojúhelník ASC je rovnoramenný. Jeho vnější úhel BSC má tedy velikost 2α. Trojúhelník MSC je rovněž rovnoramenný, a proto souměrný podle osy základny MC. Obrazem úhlu BSC v této souměrnosti je úhel ASM, jehož velikost je tudíž také 2α. Z rovnoramenného trojúhelníku ASM pak máme $|\sphericalangle BAM| = |\sphericalangle SAM| = \frac{1}{2}(180° - 2\alpha) = 90° - \alpha$ a odtud je již kolmost přímek AM a BD zřejmá, neboť $|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle CAB| = \alpha$.

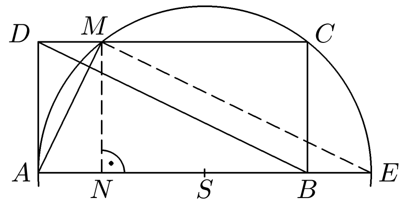
JINÉ ŘEŠENÍ. Ve shodě s obr. 2. označme AE průměr dané kružnice a N patu kolmice z bodu M na přímku AB. Z vlastností obdélníku $ANMD$ a ze symetrie vzhledem k ose strany AE plyne $|DM| = |AN| = |BE|$ a navíc jsou úsečky DM a BE rovnoběžné. Proto je $BEMD$ rovnoběžník. Přímka BD je tedy rovnoběžná s přímkou ME, která je kolmá na přímku AM podle Thaletovy věty.

NÁVODNÉ ÚLOHY:

1. Vypočítejte velikosti všech úhlů, které svírají přímky určené dvojicemi vrcholů pravidelného pětiúhelníku.



Obr. 1



Obr. 2

2. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno
   a) α, β, $m = b - a > 0$,
   b) v_a, β, $m = b - a > 0$.

   [Návod: a) Načrtněte trojúhelník a na úsečce AC zvolte bod D tak, aby $|CD| = a$. Pak vypočítejte velikosti úhlů ACB, BDC, BDA a sestrojte nejprve trojúhelník ABD. Úlohu lze řešit také využitím podobnosti. b) Na polopřímce CB zvolte bod D tak, aby $|CD| = b$, sestrojte nejprve trojúhelník ABD.)
3. Sestrojte lichoběžník $ABCD$, jsou-li dány délky jeho základen AB, CD a úhlopříček AC, BD. [Využijte trojúhelník s délkami stran $|AB|+|CD|$, $|AC|$, $|BD|$.]
4. $ABHK$, $BCGH$ a $CEFG$ jsou shodné čtverce, z nichž žádné dva se nepřekrývají. Dokažte, že platí $|\sphericalangle ABK| + |\sphericalangle ACK| + |\sphericalangle AEK| = 90°$. [F. Kuřina: Umění vidět v matematice, příklad 60.]

3. *Zjistěte, zda je číslo* $19^{1\,998} + 98^{1\,999}$ *dělitelné devíti.*

Řešení. Položme $x = a + b$, kde $a = 19^{1\,998}$ a $b = 98^{1\,999}$. Zřejmě platí

$$a = 19^{1\,998} = (18+1)^{1\,998} = (18+1)(18+1)\dots(18+1).$$

Kdybychom nyní všechny závorky posledního výrazu bez dalších úprav roznásobili, byly by všechny členy součtu dělitelné osmnácti až na člen, který je roven součinu všech jedniček. Proto je $a = 18m + 1$, kde $m \in \mathbb{N}$. Analogicky zjistíme, že

$$b = 98^{1\,999} = (99-1)^{1\,999} = (99-1)(99-1)\dots(99-1)$$

a odtud $b = 99n - 1$ pro vhodné $n \in \mathbb{N}$, neboť celkový počet uzávorkovaných činitelů na pravé straně je lichý.

Číslo $x = 18m + 1 + 99n - 1 = 9(2m + 11n)$ je dělitelné devíti.

Návodná úloha:
Nechť m, n jsou libovolná přirozená čísla. Dokažte, že následující čísla jsou dělitelná sedmi:
a) $1\,998^2 - 1\,991^2$, b) $(7m+1)^2 + (7n-1)^3$, c) $8^m + 13^{2n+1}$, d) $8^m - 13^{2n}$ e) $50^m - 176^n$.

4. *Adam a Bohouš se zúčastnili turnaje hraného systémem každý s každým jednou, v němž každý hráč měl odehrát denně právě jeden zápas. Adam a Bohouš však onemocněli a jako jediní nedokončili turnaj. Bohouš odstoupil o pět dní dříve než Adam. Celkem se odehrálo 350 zápasů. Kolik zápasů odehrál Adam? Hrál s Bohoušem?*

Řešení. Každý den byli hráči rozděleni do dvojic, v nichž měli sehrát svůj zápas. Počet všech hráčů byl tedy sudý, označme jej $2n$. Denně se mělo odehrát n zápasů, turnaj byl naplánován na $2n-1$ dní. Předpokládejme, že Adam odstoupil d dní před koncem turnaje a Bohouš $d+5$ dní před koncem.

Pokud se Adam s Bohoušem spolu utkali, odpadlo kvůli jejich nemoci z původně plánovaných $n(2n-1)$ utkání tolik zápasů, kolik jich oba neodehráli, tj. celkem $2d+5$. Pokud spolu nehráli, odpadlo jen $2d+4$ zápasů. Podle toho platí buď

$$n(2n-1) = 355 + 2d, \quad \text{nebo} \quad n(2n-1) = 354 + 2d.$$

Z rovnic plyne jednak odhad $2n^2 > 354$, ale také $n(2n-5) < 344$, neboť podle významu čísla d platí $d+5 \leqq 2n-1$. Z první nerovnosti tak vyjde $n > 13$, ze druhé $n < 15$ (pro $n \geqq 15$ je $n(2n-5) \geqq 375$). Proto nutně $n = 14$. Zároveň vidíme, že levá strana každé z obou předchozích rovnic je pro $n = 14$ sudá, takže může platit jen druhá z nich. Z ní vypočteme $d = 12$. Turnaj tedy trval $2n-1 = 27$ dní a Adam odstoupil 12 dní před koncem turnaje, odehrál 15 zápasů a s Bohoušem nehrál.

Návodné úlohy:

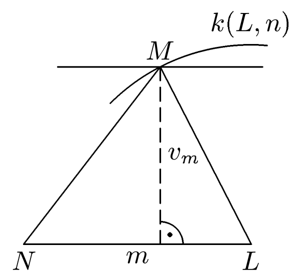
1. Určete počet všech úhlopříček konvexního n-úhelníku.
2. Letecká společnost zajišťuje lety mezi každými dvěma z několika velkých měst. (Lety z A do B a z B do A považujeme za různé.) Příští rok chce přibrat ještě několik měst, a tak zvýšit počet letů o 76. Pro kolik měst zajišťuje lety a o kolik měst se má tento počet příští rok zvýšit? [Letos n měst, přibude k měst, pak $n(n-1)+76 = (n+k)(n+k-1)$. Odtud $k(k+2n-1) = 76$, $k = 4$ a $n = 8$ nebo $k = 1$ a $n = 38$.]
3. Jarda napsal na tabuli čtyři přirozená čísla. Součet prvních dvou byl 707, součet druhého a třetího byl 700, třetího a čtvrtého 689. Určete
   a) součet prvního a čtvrtého čísla,
   b) nejmenší možnou hodnotu prvního čísla. [37. roč. MO, C–II–1]
4. Ve volejbalovém turnaji se utkalo $n \geqq 3$ družstev. Dokažte, že existuje takové družstvo A, že ke každému jinému družstvu B najdeme třetí družstvo C tak, že ve vzájemných zápasech družstev A, B, C vyhrálo A aspoň jednou a družstvo B nejvýše jednou. [37. roč. MO, C–I–5]

5. *Je dán trojúhelník ABC, v němž $|\sphericalangle BAC| = 150°$, $|AB| = 4$ cm a $|AC| = 6$ cm. Sestrojte trojúhelník dvojnásobného obsahu, jehož dvě strany jsou shodné s některými dvěma stranami trojúhelníku ABC. Najděte všechna řešení.*

Řešení. Trojúhelník ABC snadno sestrojíme a tím konstrukčně určíme jeho výšky i délky všech stran. Hledaný trojúhelník označme LMN. Při shodných základnách obou trojúhelníků jsou výšky příslušné těmto základnám v poměru jejich obsahů, tj. $2:1$. Trojúhelník LMN je určen délkami m, n stran LN, LM, které jsou shodné s některými dvěma stranami daného trojúhelníku, a výškou v_m. Přehled všech možností udává následující tabulka (je třeba si uvědomit, že každá z ostatních situací vede na trojúhelník shodný s některým předchozím):

	I	II	III
m	a	b	c
v_m	$2v_a$	$2v_b$	$2v_c$
n	b	c	a

Konstrukci trojúhelníku LMN naznačuje obr. 3. Nejprve sestrojíme úsečku NL délky m. Zbývající vrchol M je bodem průniku kružnice $k(L,n)$ a přímky p rovnoběžné s přímkou NL ve vzdálenosti v_m. Přitom stačí uvažovat řešení jen v jedné polorovině určené přímkou NL. Podle počtu bodů tohoto průniku může mít každá ze situací I až III obecně 2, 1 nebo žádné (uvažujeme jen neshodná) řešení. To představuje až 6 neshodných trojúhelníků KLM. Ve skutečnosti je jich pro dané číselné zadání jen pět. Platí totiž $2v_b = 2b\sin 150^\circ = c$, a proto se v případě II kružnice k přímky p jen dotkne.



Obr. 3

Všechna řešení jsou přehledně sestrojena na obr. 4. Jsou to trojúhelníky CBD, CBE, ACF, BAG a BAH.

Návodné úlohy:

1. Je dán rovnostranný trojúhelník ABC se stranou délky a. Sestrojte trojúhelník polovičního obsahu, jehož dvě strany mají délku a.
2. K danému pravoúhlému trojúhelníku o odvěsnách délek a, b sestrojte rovnostranný trojúhelník téhož obsahu. [J. Polák: Přehled středoškolské matematiky, úloha 28.9.]

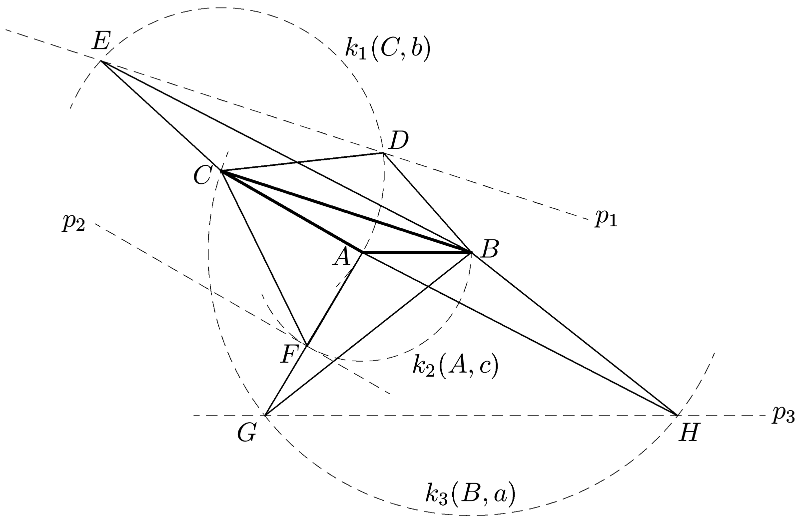
6. *Pro libovolnou dvojici reálných čísel a, b splňující vztah $a + b = 1$ platí*

$$\sqrt{a^2+a+1} + \sqrt{b^2+b+1} > 2. \tag{1}$$

Jsou-li navíc čísla a, b nezáporná, platí také

$$\sqrt{a^2+a+1} + \sqrt{b^2+b+1} < 3. \tag{2}$$

Obě tvrzení dokažte.



Obr. 4

Nejprve je nutné ověřit, zda jsou dané výrazy definovány pro všechna reálná čísla a, b. Stačí dokázat, že pro každé reálné u je výraz $U = u^2 + u + 1$ nezáporný.

1. způsob:

$$U = u^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}u + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \left(u + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Odtud vidíme, že je dokonce

$$U = u^2 + u + 1 \geqq \frac{3}{4}, \tag{3}$$

protože druhá mocnina reálného výrazu je vždy nezáporná.

2. způsob: Pro $u \geqq 0$ je zřejmě výraz U kladný. Je-li $u < 0$, je

$$U > u^2 + u + 1 + u = (u+1)^2 \geqq 0.$$

3. způsob: Představme si rovnost $U = u^2 + u + 1$ jako kvadratickou rovnici $u^2 + u + (1 - U) = 0$ s parametrem U. Tento vztah je splněn pro nějaké reálné u, jen když je příslušný diskriminant nezáporný, tj. $1 - 4(1 - U) \geqq 0$, a odtud $U \geqq \frac{3}{4}$.

4. způsob: Úpravou na tvar $U = u(u+1)+1$ a substitucí $u = s - \frac{1}{2}$ (viz též první pomocnou úlohu) máme $U = (s-\frac{1}{2})(s+\frac{1}{2})+1 = s^2 + \frac{3}{4}$, což vede na odhad (3).

Dále asi řešitelé budou zkoušet výraz

$$V = \sqrt{a^2+a+1} + \sqrt{b^2+b+1} \tag{4}$$

upravovat, aby jej mohli odhadnout. Jak asi budou postupovat? Uvedeme některé možnosti:

I. Dosazením $b = 1 - a$ do (3) dostaneme

$$V = \sqrt{a^2+a+1} + \sqrt{a^2-3a+3}. \tag{5}$$

Tím jsme se ovšem k cíli moc nepřiblížili. Zkusme ještě obě strany rovnosti (5) umocnit:

$$\begin{aligned} V^2 &= a^2 + a^2 - 2a + 1 + 3 + 2\sqrt{a^2+a+1}\sqrt{a^2-3a+3} = \\ &= a^2 + (a-1)^2 + 3 + 2\sqrt{a^4 - 2a^3 + a^2 + 3}. \end{aligned}$$

Výraz pod odmocninou se dá ještě po vytknutí a z prvních tří členů upravit, takže dostaneme

$$V^2 = 3 + a^2 + (a-1)^2 + 2\sqrt{3 + a^2(a-1)^2} \tag{6}$$

II. Rovnost (4) umocníme přímo a při dalších úpravách opakovaně nahrazujeme součty $a + b$ jedničkami:

$$\begin{aligned} V^2 &= a^2 + b^2 + 3 + 2\sqrt{a^2b^2 + ab(a+b+1) + a^2 + b^2 + a + b + 1} = \\ &= 3 + a^2 + 2\sqrt{3 + a^2b^2} + b^2. \end{aligned} \tag{7}$$

Důkaz nerovnosti (1).

1. ŘEŠENÍ (bez umocňování výrazu V): Jsou-li a, b nezáporná, je $V > \sqrt{1} + \sqrt{1} = 2$. Jestliže je $b < 0$, pak musí být $a > 1$. Položme tedy na pravé straně vztahu (4) $a = 1$ a druhou odmocninu odhadněme pomocí (3). Dostaneme tak silnější odhad, než se požaduje: $V > \sqrt{3} + \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{3} > \frac{5}{2}$.

2. ŘEŠENÍ. Když uvážíme, že druhá mocnina každého reálného čísla je nezáporná, odhadneme z (6), že $V^2 \geqq 3 + 2\sqrt{3} > 4$, a po odmocnění vyjde, že $V > 2$.

3. ŘEŠENÍ. Ze vztahu (7) vidíme, že

$$V^2 > 3 + \left(a^2 + 2\sqrt{a^2}\sqrt{b^2} + b^2\right) =$$
$$= 3 + \left(\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}\right)^2 = 3 + (|a| + |b|)^2 \geqq 4,$$

a tedy $V > 2$.

Důkaz nerovnosti (2).

1. ŘEŠENÍ. Protože a, b jsou nezáporná a nemůže být $a = b = 0$, platí

$$V < \sqrt{a^2 + 2a + 1} + \sqrt{b^2 + 2b + 1} = (a + 1) + (b + 1) = 3.$$

2. ŘEŠENÍ. Z podmínky $a + b = 1$ pro nezáporná čísla a, b máme $0 \leqq a \leqq 1$, $0 \leqq b \leqq 1$ a hodnotu výrazu V můžeme odhadnout dosazením $a = b = 1$ do (7): $V^2 < 3 + 1 + 2\sqrt{4} + 1 = 9$, takže $V < 3$.

3. ŘEŠENÍ. Při odhadu můžeme různým způsobem uplatnit užitečné nerovnosti ze čtvrté pomocné úlohy. Zvolíme-li například $m = a^2 + a + 1$ a $n = b^2 + b + 1$, dostáváme

$$m + n = (a^2 + b^2) + (a + b) + 2 = 1 - 2ab + 3 = 4 - 2ab \leqq 4,$$

kde vztah

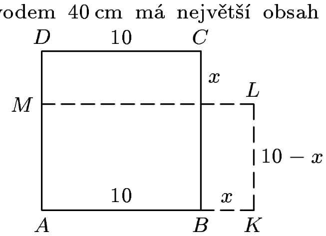
$$a^2 + b^2 = 1 - 2ab$$

použitý při úpravě jsme získali umocněním podmínky $a + b = 1$. Podle nerovnosti b) ze 4. pomocné úlohy pak je

$$V = \sqrt{m} + \sqrt{n} \leqq \sqrt{2(m + n)} \leqq \sqrt{8} < 3.$$

NÁVODNÉ ÚLOHY:

1. Dokažte, že ze všech pravoúhelníků s obvodem 40 cm má největší obsah čtverec. [Je-li délka jedné strany pravoúhelníku $a = 10 + x$, pak délka druhé je $b = 10 - x$ a obsah $S = 100 - x^2$ je největší pro $x = 0$. Jinak: Z obr. 5 přímo vidíme, že při přechodu od čtverce $ABCD$ k obdélníku $AKLM$ ubereme větší plochu, než přidáme. Můžeme přidat úkol: Pro kterou hodnotu x je přidaná plocha $x(10 - x)$ největší?]



Obr. 5

2. Určete největší nebo nejmenší hodnoty výrazu $y(x)$ a příslušné hodnoty x: a) $y = 4 - x^2$, b) $y = 3 + (x + 2)^2$, c) $y = x^2 - 2x + 7$, d) $y = x^2 + x + 1$, e) $y = 10 + 3x - x^2$.
3. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla m, n platí
$$\sqrt{m^2} + \sqrt{n^2} = |m| + |n| \geqq m + n.$$
4. Dokažte, že pro libovolná nezáporná čísla m, n platí
   a) $\sqrt{mn} \leqq \frac{1}{2}(m + n) \leqq \sqrt{\frac{1}{2}(m^2 + n^2)}$,
   b) $\sqrt{m} + \sqrt{n} \leqq \sqrt{2(m + n)}$.
   Kdy nastává rovnost?