48. ročník matematické olympiády

Úlohy školní – klauzurní části I. kola kategorie A

1. Dokažte, že existuje ostroúhlý trojúhelník ABC, jehož těžnice z vrcholů A a B jsou po řadě shodné se stranami AC a AB.

2. V rovině jsou dány dva různé body A a B. Najděte všechna reálná čísla $k > 1$, pro něž platí: Ze všech trojúhelníků ABC, v nichž $|AC| : |BC| = k$, největší možný vnitřní úhel při vrcholu A má trojúhelník rovnoramenný.

3. Ukažte, že pro každé přirozené číslo n je součin

$$\left(4-\frac{2}{1}\right)\left(4-\frac{2}{2}\right)\left(4-\frac{2}{3}\right)\ldots\left(4-\frac{2}{n}\right)$$

celé číslo.

Školní – klauzurní část I. kola kategorie a se koná

v úterý 8. prosince 1998

tak, aby začala dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. Z rovností $t_a = b$, $t_b = c$ podle známých vzorců pro velikosti těžnic

$$t_a = \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}} \quad \text{a} \quad t_b = \sqrt{\frac{a^2+c^2}{2} - \frac{b^2}{4}}$$

dostaneme po umocnění a jednoduché úpravě

$$\begin{aligned} 2c^2 - 2b^2 - \ a^2 &= 0, \\ -2c^2 - \ b^2 + 2a^2 &= 0. \end{aligned}$$

Sečtením vyjde $a^2 = 3b^2$ a dosazením do jedné z rovnic $2c^2 = 5b^2$. Obě rovnosti $t_a = b$, $t_b = c$ tedy platí zároveň, právě když $a^2 : b^2 : c^2 = 6 : 2 : 5$. Trojúhelník o stranách $\sqrt{6}, \sqrt{2}, \sqrt{5}$ zřejmě existuje a je ostroúhlý, neboť $6 < 2 + 5$.

Za úplné řešení je 6 bodů.

2. Předpokládejme, že číslo $k > 1$ je pevné. Zvolíme-li v rovině úsečku AB, vrcholy C všech uvažovaných trojúhelníků ABC zaplní Apolloniovu kružnici ω všech bodů X s vlastností $|AX| : |BX| = k$. Úhel BAC bude maximální, právě když přímka AC bude tečnou této kružnice ω (a bod C bude její bod dotyku).

Popišme polohu krajních bodů U, V toho průměru kružnice ω, jenž leží na přímce AB: bod U je vnitřním bodem úsečky AB, bod V vnitřním bodem polopřímky opačné k polopřímce BA, přičemž pochopitelně platí

$$|AU| : |BU| = |AV| : |BV| = k.$$

Odtud se snadno pomocí délky $c = |AB|$ určí, že

$$|AU| = \frac{kc}{k+1} \quad \text{a} \quad |AV| = \frac{kc}{k-1}.$$

Bod C na kružnici ω je bodem dotyku tečny vedené bodem A k této kružnici, právě když platí (mocnost bodu ke kružnici) rovnost $|AC|^2 = |AU| \cdot |AV|$, z níž po dosazení za $|AU|$ a $|AV|$ dostaneme

$$\begin{aligned} b^2 = |AC|^2 &= \frac{k^2c^2}{k^2-1}, \\ a^2 = |BC|^2 &= \frac{|AC|^2}{k^2} = \frac{c^2}{k^2-1}. \end{aligned}$$

Odtud snadno vidíme, že $a^2 + c^2 = b^2$, takže trojúhelník ABC s maximálním úhlem u vrcholu A je pravoúhlý (s přeponou AC). *To platí pro každé* $k > 1$.

Jiné řešení. Do kosinové věty $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ dosadíme $b = ka$ a vyjádříme z ní $\cos\alpha$:

$$\cos\alpha = \frac{(k^2-1)a^2 + c^2}{2kac} = \frac{(k^2-1)a}{2kc} + \frac{c}{2ka}.$$

Podle nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem dvou čísel platí

$$\frac{(k^2-1)a}{2kc}+\frac{c}{2ka} \geqq 2\sqrt{\frac{(k^2-1)a}{2kc}\cdot\frac{c}{2ka}}=\frac{\sqrt{k^2-1}}{k},$$

takže $\cos\alpha \geqq \cos\alpha_0$, neboli $\alpha \leqq \alpha_0$, kde α_0 je ostrý úhel určený rovností

$$\cos\alpha_0=\frac{\sqrt{k^2-1}}{k}.$$

Maximální hodnota $\alpha=\alpha_0$ se dosáhne, když se obě průměrovaná čísla rovnají, tedy když

$$\frac{(k^2-1)a}{2kc}=\frac{c}{2ka}, \quad \text{čili} \quad c=a\sqrt{k^2-1}.$$

Protože navíc $b=ka$, zjišťujeme, že největší úhel α má ten z uvažovaných trojúhelníků ABC, pro jehož strany platí

$$a^2+c^2=a^2+(k^2-1)a^2=k^2a^2=b^2.$$

Vidíme, že pro *každé* $k>1$ se jedná o pravoúhlý trojúhelník (s přeponou AC).

Za úplné řešení je 6 bodů.

3. Činitel $4-\dfrac{2}{k}$ můžeme pro libovolné k, $1 \leqq k \leqq n$, upravit na tvar

$$4-\frac{2}{k}=\frac{2(2k-1)}{k}=\frac{2k(2k-1)}{k^2},$$

takže pro uvažovaný součin platí

$$\prod_{k=1}^{n}\left(4-\frac{2}{k}\right)=\prod_{k=1}^{n}\frac{2k(2k-1)}{k\cdot k}=\frac{(2n)!}{n!n!}=\binom{2n}{n},$$

což je celé číslo.

Za úplné řešení je 6 bodů.