48. ročník matematické olympiády

Úlohy školní – klauzurní části I. kola kategorie B

1. Na hřišti je méně než 500 dětí. Přitom počet procent chlapců ze všech dětí se rovná počtu všech děvčat. Kolik chlapců a kolik děvčat je na hřišti? Najděte všechny možnosti.

2. V trojúhelníku ABC známe $a = |BC|$, poloměr ϱ kružnice vepsané a poloměr ϱ_a kružnice vně připsané straně BC. Dokažte, že vzdálenost středů obou kružnic se rovná $\sqrt{a^2 + (\varrho_a - \varrho)^2}$.

3. Kvadratická rovnice $x^2 - 35x + 334 = 0$, jejíž koeficienty jsou zapsány v číselné soustavě o základu z ($z \geqq 6$), má dva různé reálné kořeny. Určete z a oba kořeny.

Školní – klauzurní část I. kola kategorie B se koná

v úterý 26. ledna 1999

tak, aby začala dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. Označme po řadě c, d počet chlapců a dívek na hřišti. Potom platí

$$\frac{100c}{c+d} = d.$$

Odtud

$$c = \frac{d^2}{100-d} = \frac{100^2-(100^2-d^2)}{100-d} = \frac{10\,000}{100-d} - d - 100.$$

Jelikož c je celé nezáporné číslo, musí být $100-d$ kladným dělitelem čísla $10\,000$, tj. výraz $100-d$ může nabývat pouze hodnot: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 25, 40, 50, 80. Navíc ale podle zadání musí být splněna podmínka $c+d < 500$, tedy

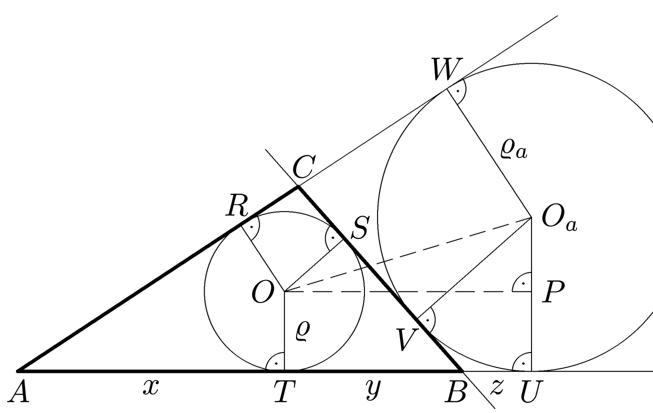
$$\frac{10\,000}{100-d} < 600,$$

odkud plyne $100-d > 16$. Pro hodnoty $100-d$ rovné 20, 25, 40, 50, 80 tak dostaneme postupně všechna řešení

$$(c,d) = (320, 80),\ (225, 75),\ (90, 60),\ (50, 50),\ (5, 20).$$

Za úplné řešení je 6 bodů, z toho 1 bod za sestavení rovnice, nejvýše 3 body za úvahy vedoucí k poznatku, že číslo $100-d$ dělí číslo $10\,000$, 2 body za následné určení všech dvojic (c,d).

2. Označme podle obr. 1 odpovídající úseky tečen k oběma vepsaným kružnicím



Obr. 1

$|AT| = |AR| = x$, $|BT| = |BS| = y$, $|BU| = |BV| = z$. Navíc ještě platí $|CR| = |CS|$, $|CW| = |CV|$, takže

$$\begin{aligned}|AW| &= |AR| + |RC| + |CW| = |AR| + |RC| + |CS| + |SV| = \\ &= x + 2|CS| + y - z\end{aligned}$$

a zároveň
$$|AW| = |AU| = x + y + z.$$
Je tedy $|CS| = z$ a také
$$a = |CB| = z + y = |TU| = |OP|.$$
Z pravoúhlého trojúhelníku OPO_a podle Pythagorovy věty pak plyne
$$|OO_a| = \sqrt{|OP|^2 + |PO_a|^2} = \sqrt{a^2 + (\varrho_a - \varrho)^2},$$
což bylo dokázati.

Za úplné řešení je 6 bodů. Za důkaz vztahu $|TU| = a$ dejte 4 body. Pokud řešitel přijde na to, že se úkol redukuje na důkaz rovnosti $|TU| = a$, tu ale nedokáže, udělte 2 body. Zbývající výpočet použitím Pythagorovy věty oceňte 2 body.

3. Daná rovnice
$$x^2 - (3z + 5)x + (3z^2 + 3z + 4) = 0$$
má dva různé reálné kořeny, právě když je její diskriminant D kladný,
$$\begin{aligned} D &= (3z + 5)^2 - 4(3z^2 + 3z + 4) = -3z^2 + 18z + 9 = \\ &= -3(z^2 - 6z - 3) = -3\big((z - 3)^2 - 12\big) > 0, \end{aligned}$$
odkud $z < 3 + \sqrt{12}$. Podle zadání je však $z \geqq 6$, proto vyhovuje jedině $z = 6$. Daná rovnice má pak v desítkové soustavě tvar
$$x^2 - 23x + 130 = 0$$
s kořeny $x_1 = 10$, $x_2 = 13$. (V soustavě o základu $z = 6$ budou mít nalezené kořeny zápis $x_1 = 14$, $x_2 = 21$.)

Za úplné řešení je 6 bodů, z toho 2 body za správný přepis koeficientů dané rovnice jako mnohočlenů proměnné z, 1 bod za výpočet diskriminantu D, 2 body za řešení nerovnosti $D > 0$ v oboru celých čísel $z \geqq 6$, 1 bod za výpočet kořenů $x_{1,2}$ v případě $z = 6$.