48. ročník matematické olympiády

Úlohy školní – klauzurní části I. kola kategorie C

1. Najděte všechny dvojice a, b nezáporných reálných čísel, pro které platí

$$\sqrt{a^2+b}+\sqrt{b^2+a}=\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a+b}.$$

2. Určete největší čtyřmístné číslo n, pro něž je součet $n^{19}+99^n$ dělitelný deseti.

3. V rovině je dán obdélník $ABCD$, nad jehož stranami AB a BC (jako nad průměry) jsou vně obdélníku sestrojeny po řadě polokružnice k a l. Najděte úsečku XY co největší délky d tak, aby platilo $X \in k$ a $Y \in l$. Délku d pak vyjádřete pomocí délek $a=|AB|$ a $b=|BC|$.

Školní – klauzurní část I. kola kategorie C se koná

v úterý 26. ledna 1999

tak, aby začala dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. Umocněním rovnice s nezápornými stranami a dalšími ekvivalentními úpravami postupně dostaneme

$$a^2+b+2\sqrt{(a^2+b)(b^2+a)}+b^2+a=a^2+b^2+2\sqrt{(a^2+b^2)(a+b)}+a+b,$$
$$\sqrt{(a^2+b)(b^2+a)}=\sqrt{(a^2+b^2)(a+b)},$$
$$(a^2+b)(b^2+a)=(a^2+b^2)(a+b),$$
$$a^2b^2+a^3+b^3+ab=a^3+ab^2+ba^2+b^3,$$
$$ab(ab+1-a-b)=0,$$
$$ab(a-1)(b-1)=0.$$

Hledanými jsou proto právě ty dvojice nezáporných čísel a, b, které splňují aspoň jednu z podmínek $a=0$, $b=0$, $a=1$ nebo $b=1$.

Za úplné řešení je 6 bodů.

2. Daný součet je lichý pro sudá n. Je tedy dělitelný deseti, jen když n je liché. Pro $n=2k+1$ dává sčítanec $99^n=(100-1)^{2k+1}=10A-1$ při dělení deseti zbytek 9, a proto druhý sčítanec n^{19} musí dát při dělení deseti zbytek 1.

Dekadický zápis čísla $3^{19}=3\cdot(10-1)^9=10B-3$ zřejmě končí číslicí 7, a proto číslo tvaru $(10r\pm3)^{19}$ nemůže dát při dělení deseti zbytek 1. Stejný závěr můžeme učinit i pro čísla tvaru $(10r-1)^{19}$ a $(10r+5)^{19}$. Odtud plyne, že n může být jedině tvaru $10r+1$, a největší takové čtyřmístné číslo je 9 991.

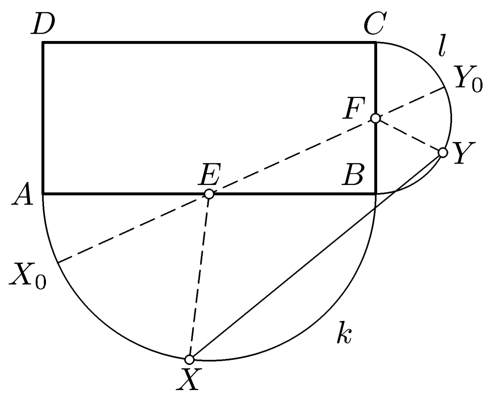
Jiné řešení. U čísel n^{19} a 99^n nás zajímají pouze jejich poslední číslice. Protože poslední cifra jakékoli mocniny n^k závisí jen na exponentu k a poslední číslici c základu n, sestavíme tabulku posledních číslic mocnin c^k pro $c=0,1,\dots,9$:

k \ c	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
3	0	1	8	7	4	5	6	3	2	9
4	0	1	6	1	6	5	6	1	6	1
5	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Ze sloupce tabulky pro $c=9$ vidíme, že číslo 99^n končí číslicí 1 nebo 9 podle toho, zda je n sudé či liché, takže číslo n^{19} má podle toho končit číslicí 9 nebo 1. Z tabulky dále vidíme, že čísla n^k a n^{k+4} končí vždy stejnou cifrou. To tedy platí i pro čísla n^{19} a n^3. Z třetího řádku uvedené tabulky ($k=3$) však vidíme, že číslo n^3 nekončí číslicí 9 pro žádné sudé n (končí totiž číslicí 9 jen pro lichá n končící číslicí 9), zato číslicí 1 končí pro právě ta lichá n, která končí číslicí 1. Největší takové čtyřmístné číslo je $n=9\,991$, které je řešením úlohy.

Za úplné řešení je 6 bodů.

3. Středy E, F polokružnic jsou totožné se středy stran AB, BC (obr. 1). Poloměry



Obr. 1

těchto polokružnic jsou $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}b$ a z trojúhelníku EBF snadno pomocí Pythagorovy věty spočteme

$$|EF| = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Podle trojúhelníkové nerovnosti (obr. 1) zřejmě pro libovolné dva body X, Y takové, že X leží na polokružnici k a Y na polokružnici l, platí

$$|XY| \leqq |XE| + |EY| \leqq |XE| + |EF| + |FY|$$

s rovností, právě když body E, F leží na úsečce XY. Úsečka XY má tedy největší délku pro $X = X_0$, $Y = Y_0$, kde body X_0, Y_0 jsou průsečíky polokružnic k, l s přímkou EF. Pro délku úsečky X_0Y_0 pak platí

$$|X_0Y_0| = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2} + \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}\bigl(a + b + \sqrt{a^2 + b^2}\bigr).$$

Za úplné řešení je 6 bodů; 4 body dejte za nalezení nejdelší úsečky a 2 body za určení její délky. Nestrhávejte body, pokud řešitel prohlásí za zřejmé (ale nedokáže) tvrzení, že nejdelší spojnice dvou kružnic leží na jejich středné.