48. ročník matematické olympiády

Úlohy II. kola kategorie A

1. Aritmetický průměr několika navzájem různých prvočísel se rovná 27. Určete, jaké největší prvočíslo mezi nimi může být.

2. Je dán čtverec $ABCD$. Dokažte, že pro všechny body P toho oblouku AB kružnice čtverci opsané, který neobsahuje body C a D, má výraz

$$\frac{|AP| + |BP|}{|CP| + |DP|}$$

stejnou hodnotu. Určete ji.

3. V libovolném trojúhelníku ABC označme M a N po řadě středy stran BC a AC. Dokažte, že těžiště trojúhelníku ABC leží na kružnici opsané trojúhelníku CMN, právě když platí rovnost

$$4 \cdot |AM| \cdot |BN| = 3 \cdot |AC| \cdot |BC|.$$

4. Najděte reálná čísla a, b, c, d, pro která všechna řešení x nerovnice

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a + dx - x^2} \leqq 2x$$

tvoří množinu $\{0\} \cup (4, +\infty)$.

II. kolo kategorie A se koná

v úterý 19. ledna 1999

tak, aby začalo dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. Označme P zkoumanou množinu prvočísel a ukažme nejprve, že $2 \notin \mathsf{P}$. Číslo 2 je jediné prvočíslo, které není liché. Kdyby tudíž platilo $2 \in \mathsf{P}$, byl by součet *lichého* počtu všech prvočísel z P *sudý*, a součet *sudého* počtu naopak *lichý*, takže uvažovaný aritmetický průměr by nemohl být roven lichému číslu 27. Proto $2 \notin \mathsf{P}$.

Protože číslo 27 není prvočíslo, není množina P jednoprvková a pro její největší prvek p^* platí $p^* > 27$. Nyní využijeme tento zřejmý poznatek: *Aritmetický průměr A skupiny reálných čísel se zmenší, kdykoliv k této skupině přidáme číslo menší než A nebo z ní odstraníme číslo větší než A.* Doplňme proto do dané množiny P všechna chybějící prvočísla p, $2 < p < 27$, a odstraňme z ní všechna prvočísla p, $27 < p < p^*$ (pokud taková vůbec existují). Dostaneme tak množinu devíti prvočísel $\{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, p^*\}$, pro jejichž aritmetický průměr (který už nemusí být celým číslem!) platí odhad

$$\frac{3+5+7+11+13+17+19+23+p^*}{9} \leqq 27.$$

(Rovnost nastane, pokud jsme ani žádné prvočíslo nepřidali, ani žádné neodstranili.) Odtud vychází $p^* \leqq 145$. Největší prvočíslo, které splňuje poslední nerovnost, je číslo 139.

Hodnota $p^* = 139$ je možná, jak ukazuje příklad

$$\mathsf{P} = \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 29, 139\},$$

který objevíme, když v součtu $3+5+7+11+13+17+19+23$ zaměníme prvočíslo 23 prvočíslem o $145 - 139 = 6$ větším. (Kdybychom si předem neuvědomili, že $2 \notin \mathsf{P}$, dostali bychom z nerovnosti

$$\frac{2+3+5+7+11+13+17+19+23+p^*}{10} \leqq 27$$

slabší odhad $p^* \leqq 170$. Pak by bylo nutné postupně vyloučit hodnoty $p^* = 167$, 163, 157, 151, 149. Přitom si patrně uvědomíme, proč $2 \notin \mathsf{P}$.)

Pro $p^* = 139$ existuje ještě jedna jediná množina P požadovaných vlastností. Je jí jedenáctiprvková množina

$$\mathsf{P} = \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 139\}.$$

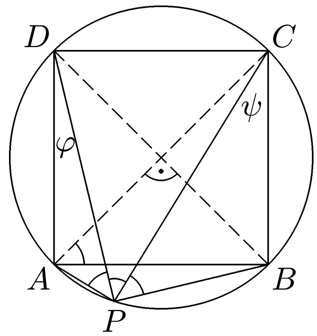
Za úplné řešení je 6 bodů. Za úvahy vedoucí k vyloučení 2 dejte 2 body, za uvedení příkladu pro $p^* = 139$ rovněž 2 body.

2. Protože zkoumaný podíl V nezávisí na velikosti a strany daného čtverce, budeme pro jednoduchost předpokládat, že $a = 1$.

Pokud $P = A$ nebo $P = B$, je zřejmě $V = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1$. Pokud platí tvrzení úlohy, je $\sqrt{2} - 1$ hledaná hodnota zkoumaného podílu.

Předpokládejme dále, že bod P je vnitřním bodem uvedeného oblouku. Protože obvodové úhly nad shodnými tětivami téže kružnice jsou shodné, platí (obr. 1)

$$|\sphericalangle APD| = |\sphericalangle CPD| = |\sphericalangle CPB| = |\sphericalangle CAB| = \frac{1}{4}\pi.$$



Obr. 1

Označme $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ a dále (obr. 1) $\varphi = |\sphericalangle ADP|$, $\psi = |\sphericalangle BCP|$, potom $\varphi + \psi = \alpha$, $|\sphericalangle PBC| = \pi - (\alpha + \psi)$, $|\sphericalangle PAD| = \pi - (\alpha + \varphi)$, takže podle sinové věty

$$V = \frac{\sin\varphi + \sin\psi}{\sin(\alpha+\varphi) + \sin(\alpha+\psi)} = \frac{2\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}}{2\sin\frac{2\alpha+\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}} = \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{\sin\frac{3}{2}\alpha} = \text{konst.}$$

Tím je dokázáno, že V je konstantní, a protože $\alpha = \frac{1}{4}\pi$, vyjde skutečně $V = \sqrt{2} - 1$, jak se snadno přesvědčíme např. pomocí identity

$$\begin{aligned}\sin\frac{3}{2}\alpha &= \sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\Big(1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\Big) = \\ &= \sin\frac{\alpha}{2}\Big(2\cos^2\frac{\alpha}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\Big) = \sin\frac{\alpha}{2}(1 + 2\cos\alpha),\end{aligned}$$

kam za $1 + 2\cos\alpha$ dosadíme $1 + \sqrt{2}$.

Jiné řešení. Pokud $P = A$ nebo $P = B$, zjistíme stejně jako v prvním řešení, že hodnota zkoumaného podílu je $\sqrt{2} - 1$. Je-li bod P vnitřním bodem uvedeného oblouku, jsou oba čtyřúhelníky $APBC$ i $APBD$ (obr. 1) tětivové, proto podle Ptolemaiovy věty platí

$$\begin{aligned}|AP| \cdot |BC| + |BP| \cdot |AC| &= |CP| \cdot |AB|,\\ |AP| \cdot |BD| + |BP| \cdot |AD| &= |DP| \cdot |AB|.\end{aligned}$$

Sečtením obou rovností a dosazením $|BC| = |AD| = |AB|$, $|BD| = |AC| = \sqrt{2}|AB|$ dostaneme

$$\big(|AP| + |BP|\big)\big(1 + \sqrt{2}\big) = |CP| + |DP|, \quad \text{neboli} \quad \frac{|AP| + |BP|}{|CP| + |DP|} = \sqrt{2} - 1.$$

Tím je tvrzení úlohy dokázáno. Daný výraz má pro každý bod P uvedeného oblouku hodnotu $\sqrt{2} - 1$.

Za úplné řešení je 6 bodů.

3. Protože těžiště T leží v opačné polorovině s hraniční přímkou MN než vrchol C, leží body C, M, N a T na jedné kružnici, právě když pro úhly $\gamma = |\sphericalangle MCN|$ a $\delta = |\sphericalangle MTN|$ platí $\gamma + \delta = \pi$, neboli $\sin\gamma = \sin\delta$ (rovnost $\gamma = \delta$ je a priori vyloučena: bod T leží uvnitř trojúhelníku ABC, takže $|\sphericalangle ATB| > |\sphericalangle ACB|$, neboli $\delta > \gamma$). Zapišme nyní, že obsah trojúhelníku ABT je roven jedné třetině obsahu trojúhelníku ABC:

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}|AM|\right) \cdot \left(\frac{2}{3}|BN|\right) \cdot \sin\delta = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}|AC| \cdot |BC| \cdot \sin\gamma\right).$$

Odtud již okamžitě plyne, že rovnost $\sin\gamma = \sin\delta$ je ekvivalentní s rovností ze zadání úlohy.

Jiné řešení. Využijeme větu o mocnosti bodu ke kružnici. Označme T zmíněné těžiště, k kružnici opsanou trojúhelníku CMN a rozlišme tři možné případy jejich vzájemné polohy. (Zdůrazněme, že vrcholy A a B vždy leží ve vnější oblasti kružnice k, neboť úsečky MC a NC jsou její tětivy.)

Je-li $T \in k$, pak $|AN| \cdot |AC| = |AT| \cdot |AM|$, tedy

$$\frac{b}{2} \cdot b = \left(\frac{2}{3}t_a\right) \cdot t_a, \quad \text{neboli} \quad 4t_a^2 = 3b^2;$$

stejně odvodíme i rovnost $4t_b^2 = 3a^2$. Vynásobením obou rovností a následným odmocněním dostaneme $4t_at_b = 3ab$, což je rovnost ze zadání úlohy.

Leží-li bod T ve *vnitřní* oblasti kružnice k, pak platí nerovnost $|AN| \cdot |AC| < |AT| \cdot |AM|$ (platí totiž rovnost $|AN| \cdot |AC| = |AT'| \cdot |AM|$, kde T' je průsečík úsečky AT s kružnicí k, takže $|AT'| < |AT|$). Postupem z předchozího odstavce tentokrát vyjde nerovnost $4t_at_b > 3ab$.

Leží-li bod T ve *vnější* oblasti kružnice k, pak platí nerovnost $|AN|\cdot|AC| > |AT|\cdot|AM|$ (platí totiž rovnost $|AN| \cdot |AC| = |AT'| \cdot |AM|$, kde T', $T' \neq M$, je průsečík polopřímky TM s kružnicí k, takže $|AT'| > |AT|$). V tomto případě vyjde nerovnost $4t_at_b < 3ab$.

Tím je důkaz u konce. Všimněme si jedné zajímavosti, která z něj plyne: rovnost $4t_at_b = 3ab$ v libovolném trojúhelníku ABC platí, jedině když zároveň $4t_a^2 = 3b^2$ a $4t_b^2 = 3a^2$.

Za úplné řešení je 6 bodů. Za důkaz toho, že rovnost ze zadání platí, pokud body C, M, N, T leží na kružnici, udělte 2 body, za důkaz opačné implikace 4 body.

4. Danou nerovnici ekvivalentně upravíme na

$$\frac{2x^3 + (a-2d)x^2 + (b-2a)x + c}{x^2 - dx - a} \geqq 0. \tag{1}$$

Nerovnici tvaru $\dfrac{A(x)}{B(x)} \geqq 0$ umíme vyřešit, známe-li reálné kořeny obou mnohočlenů $A(x)$, $B(x)$. Odpovídající množiny jejich reálných kořenů označme A, B. Označíme-li R množinu řešení nerovnice $\dfrac{A(x)}{B(x)} > 0$, která je zřejmě ekvivalentní nerovnici $A(x)B(x) > 0$, bude množinou řešení původní nerovnice $\dfrac{A(x)}{B(x)} \geqq 0$ množina $(\mathsf{R} \cup \mathsf{A}) \setminus \mathsf{B}$.

Při řešení nerovnice $A(x)B(x) > 0$ můžeme z rozkladu její levé strany odstranit libovolný kvadratický trojčlen $x^2 + px + q$ se záporným diskriminantem, a protože nás zajímá řešení nerovnice $A(x)B(x) > 0$ zejména pro $x \notin \mathsf{A} \cup \mathsf{B}$, tak i libovolnou mocninu $(x - \alpha)^n$ se sudým exponentem. Tak se vždy dostaneme k nerovnici tvaru

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_k) > 0,$$

kde $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k$ jsou ty reálné kořeny mnohočlenu $A(x)B(x)$, které měly lichou násobnost. Řešením poslední nerovnice je pro $k = 1$ interval (α_1, ∞), pro $k = 2$ sjednocení $(-\infty, \alpha_1) \cup (\alpha_2, \infty)$, pro liché $k \geqq 3$ sjednocení $(\alpha_1, \alpha_2) \cup \dots \cup (\alpha_{k-2}, \alpha_{k-1}) \cup (\alpha_k, \infty)$ a pro sudé $k > 2$ sjednocení $(-\infty, \alpha_1) \cup \dots \cup (\alpha_{k-2}, \alpha_{k-1}) \cup (\alpha_k, \infty)$.

Vraťme se teď k nerovnici (1). Protože $x = 0$ je jejím řešením, musí být nula kořenem čitatele, ne však kořenem jmenovatele, proto $c = 0$ a $a \neq 0$. Navíc z toho, že nula je „izolovaným“ řešením, plyne podle našich předchozích úvah, že nula je kořenem sudé násobnosti, tedy dvojnásobným. Proto je také $b - 2a = 0$.

Protože do množiny řešení patří interval $(4, \infty)$, ne však jeho krajní bod $x = 4$, je číslo 4 kořenem jmenovatele, takže $a + 4d = 16$. Po dosazení $a = 16 - 4d$ a rozkladu jmenovatele dostaneme ekvivalentní nerovnici

$$\frac{x^2(x + 8 - 3d)}{(x - 4)(x - d + 4)} \geqq 0.$$

Odtud však plyne, že řešením nerovnice

$$(x - 4)(x + 8 - 3d)(x - d + 4) > 0$$

musí být interval $(4, \infty)$, proto $3d - 8 = d - 4$, neboli $d = 2$, $a = 8$, $b = 16$, $c = 0$. Pro tyto hodnoty tak dostáváme nerovnici

$$\frac{x^2(x + 2)}{(x - 4)(x + 2)} \geqq 0,$$

jejíž množinou řešení je skutečně $\{0\} \cup (4, +\infty)$.

Za úplné řešení je 6 bodů. Nestrhávejte body, pokud řešitel tvrzení o násobnosti nulového kořene uvede bez řádného zdůvodnění. Za nalezení rovností $c = 0$, $a + 4d = 16$ udělte po 1 bodu. Je-li řešení vedeno tak, že v jeho závěru je nutná zkouška, a přitom o ní není ani zmínka, strhněte 1 bod.