**48. ročník matematické olympiády**

# Úlohy II. kola kategorie B

**1.** Najděte všechny čtveřice přirozených čísel $a$, $b$, $c$, $d$, pro které platí

$$\begin{aligned} ab + cd &= 1\,999, \\ ac + bd &= 1\,999, \\ ad + bc &= 1\,999. \end{aligned}$$

**2.** Je dán pravoúhlý trojúhelník $ABC$, nad jehož odvěsnami $AB$ a $BC$ (jako nad průměry) jsou vně trojúhelníku sestrojeny po řadě polokružnice $k$ a $l$. Vrcholem $B$ veďte přímku $p$, která protíná polokružnice $k$ a $l$ po řadě v bodech $X$ a $Y$ tak, aby čtyřúhelník $AXYC$ měl co největší obvod.

**3.** Najděte všechny možné hodnoty výrazu

$$\frac{x+y}{x^2+y^2},$$

kde $x$ a $y$ jsou libovolná reálná čísla splňující podmínku $x + y \geqq 1$.

**4.** Nechť $A$ a $B$ jsou různé body roviny. Dále je dán orientovaný úhel $\omega$ ($0° < \omega < 90°$). Pro libovolný bod $X$ označme po řadě $X_A$, $X_B$ obrazy bodu $X$ v otočeních kolem středů $A$ a $B$ o úhel $\omega$. Najděte všechny takové body $X$, pro něž je trojúhelník $XX_AX_B$ rovnostranný.

II. kolo kategorie B se koná

**v úterý 30. března 1999**

tak, aby začalo dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

**1.** Po odečtení druhé rovnice od první a třetí rovnice od druhé dostaneme dvě rovnice, které po jednoduché úpravě mají tvar

$$(a-d)(b-c)=0, \qquad (a-b)(c-d)=0.$$

Odtud plyne, že ze čtyř čísel $a$, $b$, $c$, $d$ jsou aspoň tři sobě rovna. Nechť je např. $a=b=c$. Po dosazení do první rovnice původní soustavy dostaneme

$$a^2+ad=a(a+d)=1\,999.$$

Jelikož $1\,999$ je prvočíslo, vyhovuje jedině $a=1$ a $a+d=1\,999$. Odtud plyne, že

$$a=b=c=1, \qquad d=1\,998.$$

Záměnou dostaneme další tři řešení

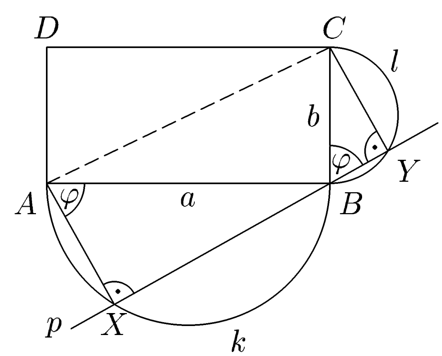
$$a=b=d=1,\ c=1\,998, \quad a=c=d=1,\ b=1\,998, \quad b=c=d=1,\ a=1\,998.$$

Dosazením se snadno přesvědčíme, že všechny čtyři čtveřice vyhovují.

Za úplné řešení je 6 bodů. Řešení nalezená odhadem, tj. když chybí důkaz, že jiná řešení neexistují, oceňte 2 body, pokud nejsou uvedena všechna řešení, dejte 4 body.

**2.** Označme $|AB|=a$, $|BC|=b$ a $\varphi$ velikost úhlu $XAB$ ($0<\varphi<90^\circ$, obr. 1). Zřejmě je také $|\sphericalangle CBY|=90^\circ-|\sphericalangle ABX|=|\sphericalangle XAB|=\varphi$. Protože délka strany $AC$ čtyřúhelníku $AXYC$ na poloze bodů $X$, $Y$ nezávisí, stačí vyšetřovat délku $d$ lomené čáry $AXYC$, pro kterou platí

$$\begin{aligned} d &= |AX|+|XB|+|BY|+|YC| = \\ &= a\cos\varphi+a\sin\varphi+b\cos\varphi+b\sin\varphi = \\ &= (a+b)(\sin\varphi+\cos\varphi) = \\ &= \sqrt{2}(a+b)\Bigl(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varphi+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varphi\Bigr) = \\ &= \sqrt{2}(a+b)\sin(\varphi+45^\circ) \leqq \sqrt{2}(a+b). \end{aligned}$$



Obr. 1

Přitom v poslední nerovnosti nastane rovnost, právě když $\varphi+45^\circ=90^\circ$, tj. právě když $\varphi=45^\circ$.

Odtud jednoduše plyne konstrukce přímky $p$.

*Poznámka.* Hodnota $d$ je maximální, právě když je maximální hodnota $d^2$, proto můžeme místo $d$ vyšetřovat hodnotu $d^2$:

$$d^2=(a+b)^2(\sin^2\varphi+2\sin\varphi\cos\varphi+\cos^2\varphi)=(a+b)^2(1+\sin 2\varphi)\leqq 2(a+b)^2.$$

Odtud vychází, že $d \leqq \sqrt{2}(a+b)$, přičemž maximální hodnoty dosahuje $d$, právě když $\sin 2\varphi = 1$, tj. $\varphi = 45°$.

**Jiné řešení.** Jak jsme už zjistili výše, je $|\sphericalangle CBY| = |\sphericalangle XAB|$, takže oba pravoúhlé trojúhelníky $BCY$ a $ABX$ jsou podobné s koeficientem podobnosti $\lambda = |BC| : |AB| = b : a$. Pro délku $d$ lomené čáry $AXYC$ tedy platí, že $d = (1+\lambda)(|AX| + |XB|)$ bude maximální, právě když bude maximální součet $|AX| + |XB|$. Z rovnosti $(|AX| + |XB|)^2 = a^2 + 2|AX||XB|$ plyne, že uvedený součet bude maximální, právě když bude maximální obsah $\frac{1}{2}|AX||XB|$ trojúhelníku $ABX$, tedy právě když bude trojúhelník $ABX$ rovnoramenný, tj. $|AX| = |XB|$ a $\varphi = 45°$.

Za úplné řešení je 6 bodů. Konstrukce přímky $p$ není nutná.

**3.** Abychom určili obor hodnot daného výrazu, najdeme pro každé $s \geqq 1$ všechna ta čísla $p$, pro která má soustava rovnic

$$x + y = s, \qquad \frac{x+y}{x^2+y^2} = p$$

v oboru reálných čísel řešení (z předpokladu $s \geqq 1$ zřejmě plyne, že je $p > 0$).

Z první rovnice vyjádříme $y = s - x$ a dosadíme do druhé rovnice. Po úpravě dostaneme pro neznámou $x$ kvadratickou rovnici

$$2px^2 - 2psx + s(ps-1) = 0.$$

Ta má reálné řešení, právě když je její diskriminant $D = 4ps(2-ps)$ nezáporný. Protože jsou obě čísla $s$ a $p$ kladná, nerovnost $D \geqq 0$ platí, právě když $ps \leqq 2$. To znamená, že uvažovaná soustava rovnic má reálné řešení pro každé $p \leqq \dfrac{2}{s} \leqq 2$ a speciálně pro $s = 1$ pro každé kladné $p \leqq 2$.

Zkoumaný výraz tedy nabývá všech hodnot z intervalu $(0, 2\rangle$.

**Jiné řešení.** Z Cauchyovy nerovnosti $(x+y)^2 \leqq 2(x^2+y^2)$, jež platí pro libovolná reálná čísla $x$ a $y$, plyne za předpokladu $x + y \geqq 1$ odhad

$$0 < \frac{x+y}{x^2+y^2} \leqq \frac{x+y}{\frac{1}{2}(x+y)^2} = \frac{2}{x+y} \leqq 2.$$

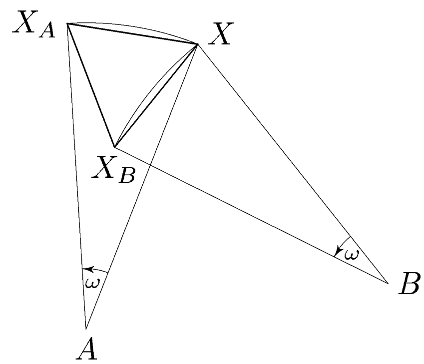
Naopak pro každé $p \in (0, 2\rangle$ stačí položit např. $x = y = \dfrac{1}{p}$. Potom

$$\frac{x+y}{x^2+y^2} = p \quad \text{a} \quad x + y = \frac{2}{p} \geqq 1.$$

Hledanou množinu hodnot tedy tvoří polouzavřený interval $(0, 2\rangle$.

Za úplné řešení je 6 bodů. Za důkaz, že hodnoty zkoumaného výrazu padnou do intervalu $(0, 2\rangle$ dejte 4 body, za důkaz, že pro každé $p \in (0, 2\rangle$ existují odpovídající $x$ a $y$, pro něž se výraz rovná $p$, dejte 2 body.

**4.** Předpokládejme, že bod $X$ má požadovanou vlastnost, tj. že trojúhelník $XX_AX_B$ je rovnostranný. Potom jsou trojúhelníky $AXX_A$ a $BXX_B$ shodné, neboť jsou rovnoramenné se shodným vrcholovým úhlem a shodnou základnou (obr. 2). Proto $|AX| = |BX|$. A protože $|\sphericalangle X_AXX_B| = 60°$, je trojúhelník $BXX_B$ obrazem trojúhelníku $AXX_A$ v otočení kolem vrcholu $X$ o úhel $60°$. V tomto otočení je obrazem bodu $A$ bod $B$, proto $|\sphericalangle AXB| = 60°$. To znamená, že trojúhelník $ABX$ je rovnostranný. Takové body $X$ existují v rovině právě dva.



Obr. 2

Za úplné řešení je 6 bodů.