48. ročník matematické olympiády

Úlohy II. kola kategorie C

1. Zjistěte, které dvojice pravidelných mnohoúhelníků mají velikosti vnitřních úhlů v poměru 2 : 3.

2. Najděte největší trojmístné číslo n, pro něž je součet

$$1^2 + 2^3 + 3^4 + 4^5 + \ldots + n^{n+1}$$

dělitelný třemi.

3. Sestrojte lichoběžník $ABCD$, pro který platí:

$$|AC| = 8\,\mathrm{cm},\ |BD| = 6\,\mathrm{cm},\ |AB| + |CD| = 10\,\mathrm{cm}$$

a střed kružnice opsané trojúhelníku ACD leží na základně AB.

4. Dokažte, že pro každá tři reálná čísla x, y, z, která splňují nerovnosti $0 < x < y < z < 1$, platí také nerovnost

$$x^2 + y^2 + z^2 < xy + yz + zx + z - x.$$

II. kolo kategorie C se koná

v úterý 30. března 1999

tak, aby začalo dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. Pravidelný n-úhelník ($n \geqq 3$) se skládá z n navzájem shodných rovnoramenných trojúhelníků, které mají při společném hlavním vrcholu úhel velikosti $\frac{1}{n}360°$. Velikost jeho vnitřního úhlu je tedy $\alpha_n = 180° - \frac{1}{n}360° = \frac{n-2}{n}180°$.

Zadání úlohy tak vede k rovnici

$$\frac{3(n-2)}{n} = \frac{2(m-2)}{m}, \tag{1}$$

kterou upravíme na tvar

$$mn = 6m - 4n \quad \text{neboli} \quad n = 6 - 4\frac{m}{n}.$$

Odtud plyne, že $n < 6$. Dosazením $n \in \{3, 4, 5\}$ najdeme následující tři dvojice $[n, m] = [3, 4], [4, 8], [5, 20]$, jež vyhovují rovnici (1).

Úloze vyhovují tři dvojice pravidelných mnohoúhelníků: trojúhelník a čtverec, čtverec a osmiúhelník, pětiúhelník a dvacetiúhelník.

Za úplné řešení je 6 bodů, z toho 3 body za nalezení vztahu ekvivalentního rovnici (1).

2. Nejprve si všimneme, že při dělení třemi dávají čísla k a k^3 vždy stejný zbytek (to stačí ověřit pro $k \in \{0, 1, 2\}$). To znamená, že i všechna čísla $k, k^3, k^5, k^7, \ldots$ dávají vesměs stejný zbytek, který závisí jen na tom, jaký zbytek při dělení třemi dává číslo k. Pro libovolné přirozené číslo n dávají tedy čísla

$$(n+6)^{n+7}, \ n^{n+7}, \ n^{n+1}$$

při dělení třemi stejný zbytek. To znamená, že zbytky jednotlivých sčítanců se ve zkoumaném součtu

$$S(n) = 1^2 + 2^3 + 3^4 + 4^5 + \ldots + n^{n+1},$$

opakují s periodou 6 (prvních šest je 1, 2, 0, 1, 1, 0). Protože $999 = 6 \cdot 166 + 3$, je jasné, že $S(999)$ dává při dělení třemi stejný zbytek jako $166 \cdot (1+2+0+1+1+0) + 1 + 2 + 0 = 833$, tedy 2. Z uvedeného výpočtu ale hned vidíme, že i $S(998)$ dává zbytek 2, zatímco $S(997)$ je dělitelné třemi, je tedy hledaným číslem číslo 997.

Jiné řešení. Vyjdeme ze stejné úvahy a všimneme si, že platí

$$S(n+18) \equiv S(n+12) + S(6) \equiv S(n+6) + 2S(6) \equiv S(n) + 3S(6) \equiv S(n) \pmod 3,$$

takže zbytky čísel $S(n)$ se opakují s periodou 18. Výpočtem zjišťujeme, že zbytky čísel $S(1)$, $S(2)$, $S(3)$, $S(4)$, … tvoří řadu (svorkou je vyznačena jedna zmíněná perioda)

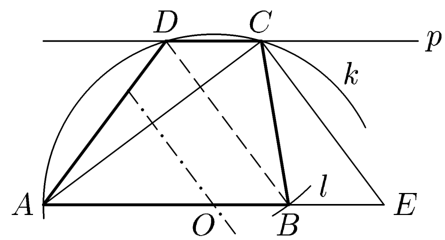
$$\underbrace{1, 0, 0, 1, 2, 2, 0, 2, 2, 0, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 0, 0,} 1, 0, 0, 1, 2, 2, \ldots$$

Součet $S(n)$ je tedy dělitelný třemi, právě když číslo n při dělení osmnácti dává některý ze zbytků 2, 3, 7, 10, 17 nebo 0.

Protože největší trojciferné číslo je tvaru $999 = 18 \cdot 55 + 9$, je hledané číslo $18 \cdot 55 + 7 = 997$.

Za úplné řešení je 6 bodů. Za pouhé odhalení periodicity sčítanců dejte 3 body.

3. Předpokládejme, že $ABCD$ (obr. 1) je hledaný lichoběžník a posuňme úsečku BD o vektor $\boldsymbol{DC}$; obraz bodu B označme E.



Obr. 1

Protože $|BD| = |EC|$ a $|AE| = |AB| + |CD|$, můžeme trojúhelník ACE sestrojit podle věty sss. Střed O kružnice opsané trojúhelníku ACD pak sestrojíme jako průsečík osy úsečky AC s přímkou AE. Nakonec sestrojíme vrchol D jako průsečík kružnice $k(O; |OA|)$ s přímkou p vedenou bodem C rovnoběžně s AE a vrchol B jako průsečík kružnice $l(D, |CE|)$ s polopřímkou AE.

Úloha má ve zvolené polorovině s hraniční přímkou AE jediné řešení.

Poznámka. Délky jsou zadány tak, že pro strany trojúhelníku AEC platí rovnost $|AE|^2 = |AC|^2 + |CE|^2$, takže trojúhelník AEC je pravoúhlý a střed O jeho kružnice opsané je středem úsečky AE. Toho lze samozřejmě využít ke konstrukci.

Za úplné řešení je 6 bodů.

4. Označme písmeny L, P po řadě výrazy na levé a pravé straně dokazované nerovnosti. Potom je

$$\begin{aligned} P - L &= x(y-x) + y(z-y) + z(x-z) + (z-x) = \\ &= x(y-x) + y(z-y) + (z-x)(1-z) > 0, \end{aligned}$$

neboť všechny tři sčítance posledního výrazu jsou podle zadání kladné.

Jiné řešení. Protože $0 < y-x < 1$, je $(y-x)^2 < y-x$. Podobně je také $(z-y)^2 < z-y$ a $(z-x)^2 < z-x$. Dostáváme tak nerovnosti

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 2xy + (y-x)^2 < 2xy + y - x, \\ y^2 + z^2 &= 2yz + (z-y)^2 < 2yz + z - y, \\ x^2 + z^2 &= 2xz + (z-x)^2 < 2xz + z - x, \end{aligned}$$

jejichž sečtením obdržíme

$$2(x^2 + y^2 + z^2) < 2(xy + yz + xz) + 2(z-x),$$

což je ekvivalentní s dokazovanou nerovností.

Za úplné řešení je 6 bodů.