1. Do čitatele i jmenovatele zlomku

$$\frac{29:28:27:26:25:24:23:22:21:20:19:18:17:16}{15:14:13:12:11:10:\ \ 9:\ \ 8:\ \ 7:\ \ 6:\ \ 5:\ \ 4:\ \ 3:\ \ 2}$$

smíme opakovaně vpisovat závorky, a to vždy na stejná místa pod sebe.

a) Určete nejmenší možnou celočíselnou hodnotu výsledného výrazu.

b) Najděte všechny možné celočíselné hodnoty výsledného výrazu. (*J. Šimša*)

Řešení. a) Výsledný výraz lze vždy zapsat (aniž krátíme) jako podíl $A:B$ dvou součinů A a B přirozených čísel, pro něž platí

$$A\cdot B = 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot 29 = 29! = 2^{25}\cdot 3^{13}\cdot 5^{6}\cdot 7^{4}\cdot 11^{2}\cdot 13^{2}\cdot 17\cdot 19\cdot 23\cdot 29.$$

(Exponenty prvočísel lze počítat bezprostředně po činitelích, nebo podle známého pravidla: prvočíslo p má v rozkladu čísla $n!$ exponent rovný součtu

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\cdots, \tag{1}$$

kde $[x]$ značí celou část čísla x.) Ta prvočísla, která mají v rozkladu čísla 29! lichý exponent, nemohou z podílu $A:B$ „zmizet“ ani po jeho krácení. Proto žádná *celočíselná* hodnota výsledku není menší než číslo

$$H = 2\cdot 3\cdot 17\cdot 19\cdot 23\cdot 29 = 1\,292\,646.$$

Na druhou stranu,

$$\begin{aligned}
&\frac{29:(28:27:26:25:24:23:22:21:20:19:18:17:16)}{15:(14:13:12:11:10:\ \ 9:\ \ 8:\ \ 7:\ \ 6:\ \ 5:\ \ 4:\ \ 3:\ \ 2)} =\\
&\quad= \frac{29\cdot 14\cdot 27\cdot 26\cdot 25\cdot 24\cdot 23\cdot 22\cdot 21\cdot 20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16}{15\cdot 28\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot\ \ 9\cdot\ \ 8\cdot\ \ 7\cdot\ \ 6\cdot\ \ 5\cdot\ \ 4\cdot\ \ 3\cdot\ \ 2} =\\
&\quad= \frac{29\cdot 14^2}{28}\cdot\frac{27!}{(15!)^2} = 29\cdot 7\cdot\frac{2^{23}\cdot 3^{13}\cdot 5^{6}\cdot 7^{3}\cdot 11^{2}\cdot 13^{2}\cdot 17\cdot 19\cdot 23}{\left(2^{11}\cdot 3^{6}\cdot 5^{3}\cdot 7^{2}\cdot 11\cdot 13\right)^2} = H.
\end{aligned}$$

(Opět se vyplatilo počítat exponenty podle (1).) Číslo H je tedy hledaná nejmenší hodnota.

b) Podívejme se nyní podrobněji na to, jak vypadají součiny A a B z první věty řešení, jsou-li čitatel a jmenovatel zlomku uzávorkováni stejným způsobem. Z každé ze čtrnácti dvojic pod sebou stojících čísel

$$\{29,15\},\ \{28,14\},\ \{27,13\},\ \ldots,\ \{16,2\}$$

je jedno číslo činitelem v součinu A, druhé číslo je činitelem v součinu B (takže A, B mají po 14 činitelích). Výslednou hodnotu V pak můžeme zapsat také jako součin

$$\left(\frac{29}{15}\right)^{\varepsilon_1}\left(\frac{28}{14}\right)^{\varepsilon_2}\left(\frac{27}{13}\right)^{\varepsilon_3}\left(\frac{26}{12}\right)^{\varepsilon_4}\cdot\ldots\cdot\left(\frac{17}{3}\right)^{\varepsilon_{13}}\left(\frac{16}{2}\right)^{\varepsilon_{14}},$$

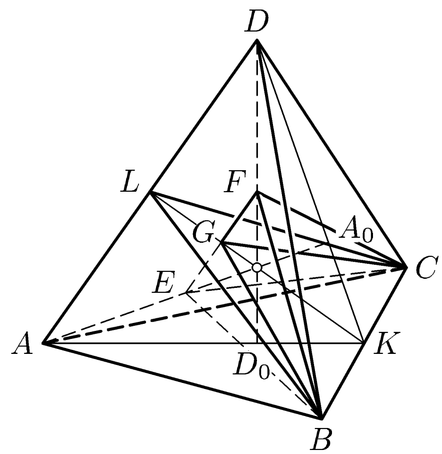
kde $\varepsilon_i = \pm 1$, přitom zřejmě $\varepsilon_1 = 1$ a $\varepsilon_2 = -1$ bez ohledu na uzávorkování. Protože zlomky $\frac{27}{13}, \frac{26}{12}, \frac{25}{11}, \ldots, \frac{16}{2}$ jsou větší než 1, výsledná hodnota V (ať už je celé číslo či nikoliv) musí splňovat odhad

$$V \leqq \frac{29}{15} \cdot \frac{14}{28} \cdot \frac{27}{13} \cdot \frac{26}{12} \cdot \ldots \cdot \frac{17}{3} \cdot \frac{16}{2} = H,$$

kde H je přirozené číslo, určené v části a) řešení jako nejmenší možná celočíselná hodnota V. Odtud plyne, že H je *jediná* možná celočíselná hodnota V. (Navíc jsme ukázali, že při stejném uzávorkování čitatele a jmenovatele daného zlomku je *každá* hodnota výsledného výrazu menší než číslo H.)

2. V obecném čtyřstěnu $ABCD$ označme E a F středy těžnic z vrcholů A a D. Určete poměr objemů čtyřstěnů $BCEF$ a $ABCD$. (*P. Leischner*)

Řešení. Označme K a L středy hran BC a AD a A_0, D_0 příslušná těžiště stěn proti vrcholům A, D (obr. 1). Obě těžnice AA_0, DD_0 leží v rovině AKD, přičemž jejich průsečík T (těžiště čtyřstěnu) je dělí v poměru $3:1$ a zároveň je středem spojnice KL (to je zřejmé z vlastností těžiště: $T = \frac{1}{4}(A+B+C+D) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(A+D)+\frac{1}{2}(B+C)) = \frac{1}{2}(K+ + L)$). Odtud plyne, že je $|ET| : |AT| = |FT| : |DT| = 1 : 3$, takže $|EF| = \frac{1}{3}|AD|$. Rovina BCL půlí obě úsečky AD i EF, a proto také rozděluje oba uvažované čtyřstěny $ABCD$ i $BCEF$ na části stejného objemu. Označme G střed úsečky EF, pro příslušné objemy pak platí



Obr. 1

$$\frac{V(BCEF)}{V(ABCD)} = \frac{V(BCGF)}{V(BCLD)} = \frac{|GF|}{|LD|} \cdot \frac{S(BCG)}{S(BCL)} = \\ = \frac{1}{3}\frac{|KG|}{|KL|} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}.$$

3. Ukažte, že existuje trojúhelník ABC, v němž při obvyklém označení stran a těžnic platí $a \neq b$ a zároveň $a + t_a = b + t_b$. Dále dokažte existenci takového čísla k, že pro každý zmíněný trojúhelník platí $a + t_a = b + t_b = k(a + b)$. Nakonec najděte všechny poměry $a : b$ stran a, b takových trojúhelníků. (*J. Šimša*)

Řešení. Víme, že

$$t_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2), \quad t_b^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2),$$

takže

$$t_a^2 - t_b^2 = \frac{3}{4}(b^2 - a^2).$$

Protože podle předpokladu úlohy $t_a - t_b = b - a \neq 0$, vychází odtud $t_a + t_b = \frac{3}{4}(b + a)$. Ze soustavy rovnic

$$t_a - t_b = b - a,$$
$$t_a + t_b = \frac{3}{4}(b + a)$$

určíme $t_a = \frac{1}{8}(7b - a)$, $t_b = \frac{1}{8}(7a - b)$, tedy

$$a + t_a = b + t_b = \frac{7}{8}(a + b).$$

Proto je $k = \frac{7}{8}$.

Nyní zjistíme, pro které délky $a \neq b$ existuje trojúhelník ABC o stranách a, b a těžnicích $t_a = \frac{1}{8}(7b - a)$, $t_b = \frac{1}{8}(7a - b)$. Především musí být $t_a > 0$, $t_b > 0$, což je ekvivalentní nerovnosti $\frac{1}{7} < \frac{a}{b} < 7$. Známe všechny tři strany trojúhelníku AB_1T:

$$|AB_1| = \frac{b}{2}, \quad |AT| = \frac{2}{3}t_a = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8}(7b - a) = \frac{1}{12}(7b - a),$$
$$|B_1T| = \frac{1}{3}t_b = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8}(7a - b) = \frac{1}{24}(7a - b).$$

Zkoumáme-li trojúhelníkové nerovnosti pro tyto tři délky, dostaneme podmínku

$$\frac{1}{3} < \frac{a}{b} < 3,$$

z níž je třeba dle předpokladu vyloučit hodnotu $\dfrac{a}{b} = 1$. To je zároveň i postačující podmínka: Sestrojený trojúhelník AB_1T lze vždy doplnit na trojúhelník ABC se stranou $b = |AC|$ a těžnicemi $t_a = |AA_1|$, $t_b = |BB_1|$. Konečně z rovnosti $t_a^2 - t_b^2 = \frac{3}{4}(b^2 - a^2)$ vidíme, že je i $a = |BC|$.

4. V jistém jazyce jsou pouze dvě písmena A a B. Pro jeho slova platí:

1) Slova délky 1 neexistují, slova délky 2 jsou pouze AB a BB.

2) Posloupnost písmen délky $n > 2$ je slovo, právě když vznikne z nějakého slova délky menší než n, a to tak, že v tomto slově písmena A ponecháme na místě, současně však každé písmeno B nahradíme nějakým (ne nutně stejným) slovem.

Dokažte, že počet slov délky n je pro každé n roven číslu

$$\frac{2^n + 2 \cdot (-1)^n}{3}.$$

(*P. Hliněný, P. Kaňovský*)

Řešení. Každé konečné posloupnosti písmen A, B říkejme řetězec. Všude dále $\cdots$ značí vhodný (třeba i prázdný) řetězec, zatímco $***$ použijeme k zápisu řetězce ze stejných písmen (např. $\underbrace{B *** B}_{k}$ značí řetězec k písmen B).

Dokážeme, že libovolný řetězec je slovo (uvažovaného jazyka), právě když splňuje následující podmínku:

P: *Řetězec končí písmenem B a buď začíná písmenem A, nebo začíná (či je dokonce celý tvořen) sudým počtem písmen B.*

Nutnost podmínky P je celkem zřejmá: splňují ji obě slova AB a BB délky 2 a splňuje ji i každé nové slovo vzniklé konstrukcí z bodu 2), pokud podmínku P splňují slova, kterými při konstrukci nahrazujeme jednotlivá písmena B.

Nyní indukcí vzhledem k číslu n dokážeme, že každý řetězec délky n splňující podmínku P je slovo. To zřejmě platí pro $n = 1$ a $n = 2$; je-li $n > 2$, pak řetězec délky n, který splňuje P, má jeden z tvarů

$$AA\cdots B,\ AB\cdots B,\ \underbrace{B***B}_{2k}A\cdots B,\ \underbrace{B***B}_{2k+2},$$

kde $2 \leqq 2k \leqq n-2$. Naší úlohou je ukázat, že tyto čtyři typy řetězců vznikají pomocí konstrukce z bodu 2), při níž písmena B nahrazujeme řetězci (délky menší než n) splňujícími podmínku P (tedy *slovy* dle indukčního předpokladu).

Slovo $AA\cdots B$ vznikne jako $A(A\cdots B)$ ze slova AB. Slovo $AB\cdots B$ vznikne buď jako $A(B\cdots B)$ ze slova AB, nebo jako $(AB)(\cdots B)$ ze slova BB, podle toho, zda za jeho prvním písmenem A následuje sudý resp. lichý počet písmen B. Slovo $\underbrace{B***B}_{2k}A\cdots B$ vznikne jako $(\underbrace{B***B}_{2k})(A\cdots B)$ ze slova BB, slovo $\underbrace{B***B}_{2k+2}$ jako $(\underbrace{B***B}_{2k})(BB)$ ze slova BB. Tím je důkaz indukcí hotov.

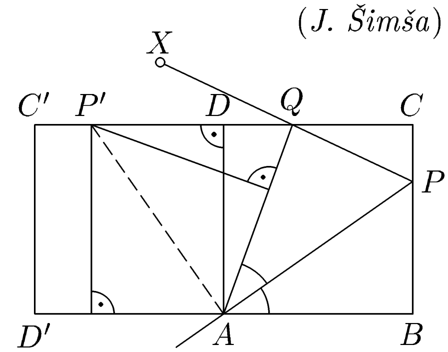
Nyní pomocí podmínky P již snadno dokážeme, že pro počet p_n slov délky n skutečně platí vzorec

$$p_n = \frac{2^n + 2\cdot(-1)^n}{3},$$

jehož platnost je zřejmá pro $n = 1$ a $n = 2$, neboť $p_1 = 0$ a $p_2 = 2$. Proto vzorec bude dokázán matematickou indukcí, ukážeme-li, že pro každé n platí rovnost $p_{n+2} = 2^n + p_n$, kterou čísla $\frac{1}{3}\left(2^n + 2\cdot(-1)^n\right)$ zřejmě splňují. Rovnost $p_{n+2} = 2^n + p_n$ však plyne okamžitě z toho, že podle vlastnosti P je každé slovo délky $(n+2)$ buď tvaru $A\cdots B$, kde $\cdots$ je libovolný řetězec délky n (těch je 2^n), nebo je tvaru $BB\cdots$, kde $\cdots$ je libovolné z p_n slov délky n.

5. V rovině je dán ostrý úhel APX. Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby bod P ležel na straně BC a aby polopřímka PX proťala stranu CD v takovém bodě Q, že bod P leží na ose úhlu BAQ. *(J. Šimša)*

Řešení. Uvažujme otočení kolem středu A o $90°$, které zobrazí vrchol B hledaného čtverce $ABCD$ na vrchol D, a označme P', C', D' obrazy bodů P, C, D v tomto otočení (obr. 2). Protože $|\sphericalangle PAP'| = 90°$, plyne z vlastnosti os vedlejších úhlů, že AP' je osa úhlu QAD'. Proto má bod P' stejnou vzdálenost od AD' i od AQ (rovnou straně hledaného čtverce). Tyto vzdálenosti jsou výšky v trojúhelníku AQP'. Protože bod P' můžeme sestrojit, můžeme sestrojit i bod Q jako průsečík ramene PX s osou úsečky AP'. Zbytek konstrukce je už zřejmý.



Obr. 2

6. Najděte všechny dvojice reálných čísel a a b, pro které má soustava rovnic

$$\frac{x+y}{x^2+y^2} = a, \qquad \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = b$$

s neznámými x a y řešení v oboru reálných čísel. *(J. Šimša)*

Řešení. Má-li daná soustava řešení (x, y) pro čísla $a = A$, $b = B$, má zřejmě i řešení (kx, ky) pro libovolné $k \neq 0$ a pro čísla $a = \dfrac{1}{k}A$, $b = kB$. Odtud vidíme, že existence řešení dané soustavy závisí jen na hodnotě součinu ab.

Budeme tedy nejdříve zkoumat hodnoty výrazu

$$P(u,v)=\frac{(u+v)(u^3+v^3)}{(u^2+v^2)^2},$$

kde čísla u a v splňují normalizační podmínku $u^2+v^2=1$. Podle ní platí

$$\begin{aligned}P(u,v)&=(u+v)(u^3+v^3)=(u+v)^2(u^2-uv+v^2)=\\&=(u^2+2uv+v^2)(1-uv)=(1+2uv)(1-uv).\end{aligned}$$

Za podmínky $u^2+v^2=1$ nabývá součin uv všech hodnot z intervalu $\langle -\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle$ (je-li $u=\cos\alpha$ a $v=\sin\alpha$, je $uv=\frac{1}{2}\sin 2\alpha$). Proto stačí zjistit množinu hodnot funkce $f(t)=(1+2t)(1-t)$ na intervalu $t\in\langle -\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle$. Z vyjádření

$$f(t)=-2t^2+t+1=-2\Big(t-\frac{1}{4}\Big)^2+\frac{9}{8}$$

plyne, že hledanou množinou hodnot je uzavřený interval s krajními body $f(-\frac{1}{2})=0$ a $f(\frac{1}{4})=$ $=\frac{9}{8}$.

To tedy znamená, že pokud má daná soustava řešení, musí pro její parametry a a b platit $0\leqq ab\leqq\frac{9}{8}$, přitom rovnost $ab=0$ je možná, jen když $x+y=0$, tehdy však $a=b=0$.

Splňují-li naopak některá čísla a a b nerovnosti $0<ab\leqq\frac{9}{8}$, existují dle dokázaného čísla u a v taková, že $u^2+v^2=1$ a $(u+v)(u^3+v^3)=ab$. Označíme-li $a'=u+v$ a $b'=u^3+v^3$, pak z rovnosti $a'b'=ab\neq 0$ plyne, že oba poměry $a:a'$ a $b':b$ mají tutéž hodnotu $k\neq 0$. Pak ale dvojice $x=ku$ a $y=kv$ je zřejmě řešením soustavy rovnic ze zadání úlohy pro uvažované hodnoty a a b.