40. mezinárodní matematická olympiáda

V roce 1999 se každoroční soutěžní klání matematických talentů ze středních škol zemí celého světa se vrátilo po sedmi letech na evropský kontinent. Byl k tomu důvod spojený s číslem 10, základem naší číselné soustavy, důvod, kterému obvykle říkáme *jubileum*. A tak letošní jubilejní ročník mezinárodní matematické olympiády hopstilo Rumunsko, stejná země, která před 40 lety vznik této soutěže iniciovala a uspořádala její první dva ročníky (v Rumunsku se pak soutěž konala ještě v letech 1969 a 1978).

Letos přijelo do Rumunska 450 soutěžících z 81 zemí. Družstvo České republiky tvořila šestice čerstvých maturantů: *Luboš Dostál* (GOA Stříbro), *Zdeněk Dvořák* (G Nové Město na Moravě), *David Holec*, *Pavel Moravec*, *Martin Viščor* a *Lukáš Vokřínek* (všichni G tř. Kpt. Jaroše Brno). Vedoucími naší delegace byli *doc. Jaromír Šimša* a *dr. Jaroslav Švrček*. Vlastní dvoudenní soutěž (jednotlivců, nikoli družstev) spočívala jako obvykle v řešení šesti úloh, každý den po dobu 4,5 hodiny. Podle bodového hodnocení (nejvýše 7 bodů za jednu úlohu) rozhodla mezinárodní porota o udělení 28 zlatých medailí (soutěžícím se ziskem alespoň 28 bodů), 80 stříbrných medailí (za zisk 27–19 bodů) a 118 bronzových medailí (za zisk 18–12 bodů). Maximálního počtu 39 bodů dosáhli tři soutěžící: *Maksym Fedorčuk* (Ukrajina), *Tamas Terpai* (Maďarsko) a *Ştefan Laurenţiu Horneţ* (Rumunsko). Náš nejlepší účastník Vokřínek (14 b.) získal po bronzové medaili z Argentiny (1997) a stříbrné medaili z Tchajwanu (1998) letos opět bronz, ostatní soutěžící Dvořák (11 b.), Viščor (10 b.), Dostál (9 b.), Moravec (6 b.) a Holec (5 b.) na medaile svými výkony nedosáhli. Výsledek našeho družstva je jistě velkým zklamáním, vždyť v neoficiálním pořadí zemí jsme se umístili na 49.-50. místě (o zhruba 30 míst níže než obvykle). Nezbývá než doufat, že prestiž českých soutěžících bude v příštích ročnících MMO rychle obnovena. Podívejme se, jak vypadá letošní pořadí nejlepších zemí (v závorce uvádíme vždy souhrnný bodový zisk šesti soutěžích a počty medailí Z–S–B): 1.–2. Čína (182 b., 4–2–0) a Rusko (182 b., 4–2–0), 3. Vietnam (177 b., 3–3–0), 4. Rumunsko (173 b.,3–3–0), 5. Bulharsko (170 b., 2–4–0), 6. Bělorusko (167 b., 3–2–0), 7. Korea (164 b., 3–3–0), 8. Írán (159 b., 2–4–0), 9. Tchajwan (153 b., 1–5–0), 10. USA (150 b., 2–3–1), 11. Maďarsko (147 b., 1–4–1), 12. Ukrajina (136 b., 2–2–1), 13. Japonsko (135 b., 1–4–0), 14. Jugoslávie (130 b., 1–2–3), 15. Austrálie (116 b., 1–1–3), 16. Turecko (109 b., 1–1–4), 17. Německo (108 b., 0–2–4), 18. Indie (107 b., 0–3–3), 19. Polsko (104 b., 1–0–5), 20. Velká Británie (100 b., 0–3–2), 21. Slovensko (88 b., 0–2–3), 22. Lotyšsko (86 b., 1–1–0), 23. Itálie (82 b., 0–1–2), 24. Švýcarsko (79 b., 0–1–3), 25.–26. Izrael (78 b., 0–0–5) a Mongolsko (78 b., 0–2–1), 27.–28. Kuba (77 b., 0–1–4) a JAR (77 b., 0–1–1), 29.–30. Brazílie (75 b., 0–0–4) a Rakousko (75 b., 0–1–2), 31.–32. Kanada (74 b., 0–1–2) a Nizozemsko (74 b., 0–0–4), 33.–34. Francie (73 b., 0–1–2) a Hongkong (73 b., 0–0–4), 35. Kazachstán (72 b., 0–0–4), 36.–37. Makedonie (71 b., 0–0–5) a Singapur (71 b., 0–0–4), 38. Gruzie (68 b., 0–1–1), 39.–40. Arménie (67 b., 0–0–3) a Norsko (67 b., 0–1–2), 41.–42. Chorvatsko (66 b., 0–1–2) a Švédsko (66 b., 0–0–3), 43.–44. Bosna–Hercegovina (65 b., 0–0–3) a Finsko (65 b., 0–1–0), 45. Argentina (63 b., 0–0–3), 46. Španělsko (60 b., 0–0–1), 47.–48. Řecko (57 b., 0–2–0) a Thajsko (57 b., 0–0–3), 49.–50. Česká republika (55 b., 0–0–1) a Kolumbie (55 b., 0-1-1), ...

Uveďme nyní znění soutěžních úloh.

Úloha 1. Určete všechny konečné množiny S alespoň tří bodů dané roviny, které splňují následující podmínku: Pro každé dva různé body A a B z S je osa úsečky AB osou souměrnosti množiny S. (Estonsko)

Úloha 2. Nechť n je pevné celé číslo, přičemž $n \geq 2$.

a) Určete nejmenší konstantu C takovou, že nerovnost

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq C \Big(\sum_{1\leq i\leq n} x_i \Big)^4$$

platí pro všechna reálná čísla $x_1, \ldots, x_n \geq 0$.

b) Pro tuto konstantu C zjistěte, kdy nastane rovnost. (Polsko)

Úloha 3. Uvažujme čtvercovou desku $n \times n$, kde n je pevné sudé přirozené číslo. Tato deska je rozdělena na n^2 jednotkových čtverců. Řekneme, že dva různé čtverce desky jsou *sousední*, pokud mají společnou stranu. N jednotkových čtverců desky je označeno takovým způsobem, že každý čtverec (označený nebo neoznačený) je sousední s aspoň jedním označeným čtvercem. Určete nejmenší možnou hodnotu N. (Bělorusko)

Úloha 4. Určete všechny dvojice (n, p) přirozených čísel takových, že p je prvočíslo, $n \leq 2p$ a číslo $(p-1)^n + 1$ je dělitelné číslem n^{p-1}. (Tchajwan)

Úloha 5. Dvě kružnice Γ_1 a Γ_2 leží v kruhu omezeném kružnicí Γ a dotýkají se kružnice Γ po řadě v různých bodech M a N. Kružnice Γ_1 prochází středem kružnice Γ_2. Přímka procházející oběma průsečíky kružnic Γ_1 a Γ_2 protíná kružnici Γ v bodech A a B. Přímky MA a MB protínají kružnici Γ_1 po řadě v bodech C a D. Dokažte, že přímka CD se dotýká kružnice Γ_2. (Rusko)

Úloha 6. Určete všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že rovnost

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + x\,f(y) + f(x) - 1$$

platí pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$. (Japonsko)