ÚLOHY DOMÁCÍHO KOLA 49. ROČNÍKU MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY PRO ŽÁKY STŘEDNÍCH ŠKOL

Kategorie A

1. Nechť $P(x)$, $Q(x)$ jsou kvadratické trojčleny takové, že tři z kořenů rovnice $P\big(Q(x)\big) = 0$ jsou čísla -22, 7, 13. Určete čtvrtý kořen této rovnice. (*P. Černek*)

2. Nechť K, L, M jsou po řadě vnitřní body stran BC, CA, AB daného trojúhelníku ABC takové, že kružnice vepsané dvojicím trojúhelníků ABK a CAK, BCL a ABL, CAM a BCM mají vnější dotyk. Pak platí

$$|BK| \cdot |CL| \cdot |AM| = |CK| \cdot |AL| \cdot |BM|.$$

Dokažte.

Poznámka. Z uvedené rovnosti plyne na základě Cévovy věty, že přímky AK, BL, CM procházejí týmž bodem. (*J. Švrček*)

3. V oboru kladných čísel řešte soustavu

$$\begin{aligned}\sqrt{xy} + \sqrt{xz} - x &= a,\\ \sqrt{yz} + \sqrt{yx} - y &= b,\\ \sqrt{zx} + \sqrt{zy} - z &= c,\end{aligned}$$

kde a, b, c jsou daná kladná čísla. (*R. Horenský*)

4. V rovině je dáno 1 999 shodných trojúhelníků o obsahu 1, které jsou obrazy téhož trojúhelníku v různých posunutích. Je-li průnikem všech daných trojúhelníků množina M, která obsahuje těžiště každého z nich, je obsah množiny M alespoň $\frac{1}{9}$. Dokažte. (*M. Beneš*)

5. Je dána funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taková, že $f(n) = 1$, je-li n liché, a $f(n) = k$ pro každé sudé číslo $n = 2^k l$, kde k je přirozené číslo a l číslo liché. Určete největší přirozené číslo n, pro něž platí

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n) \le 123\,456.$$

(*S. Trávníček*)

6. Je dán čtyřboký jehlan $ABCDV$ s podstavou $ABCD$. Jeho hrany AB, CD jsou rovnoběžné a roviny ABV a CDV vzájemně kolmé. Označme P patu výšky z vrcholu V na stranu AB v trojúhelníku ABV a Q patu výšky z vrcholu V na stranu CD v trojúhelníku CDV. Dokažte nerovnost

$$|AV|^2 + |BV|^2 + |CV|^2 + |DV|^2 \geq |PQ|^2 + 2(S_{ABV} + S_{CDV} + S_{PQV}),$$

kde S_{XYZ} značí obsah trojúhelníku XYZ. Zjistěte rovněž, kdy platí rovnost.
(J. Bábeľa)

Kategorie B

1. Pro která reálná čísla t má funkce $f(x) = 5x + 44 + t|x-2| - 3|x-t|$ maximum rovné 0? *(P. Černek)*

2. Označme S střed kružnice vepsané libovolnému trojúhelníku ABC. Dokažte, že rovnost $|AS| \cdot |BS| = |CS| \cdot |AB|$ platí, právě když je úhel ACB pravý.
(J. Švrček)

3. Určete reálná čísla a, b, pro která má soustava

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2z^2 &= 16, \\ xyz^2 + xy + z^2 &= a, \\ x + y + 2z &= b \end{aligned}$$

v oboru reálných čísel právě jedno řešení. *(J. Bábeľa)*

4. Jsou dány kružnice k a l s různými poloměry, které se vně dotýkají v bodě T. Průsečíkem M jejich společných vnějších tečen veďme sečnu s obou kružnic. Označme X ten z obou průsečíků kružnice k se sečnou s, který je vzdálenější od bodu M. Podobně označme Y ten z obou průsečíků kružnice l se sečnou s, který je vzdálenější od bodu M. Nechť P je takový bod, že $XTYP$ je rovnoběžník. Určete množinu bodů P odpovídajících všem takovým sečnám s. *(J. Zhouf)*

5. Devítistěn $ABCDEFGHV$ vznikl slepením krychle $ABCDEFGH$ a pravidelného čtyřbokého jehlanu $EFGHV$. Na každou stěnu tohoto devítistěnu jsme napsali číslo. Čtyři z napsaných čísel jsou 25, 32, 50 a 57. Pro každý vrchol devítistěnu $ABCDEFGHV$ sečteme čísla na všech stěnách, které ho obsahují. Dostaneme tak devět stejných součtů. Určete zbývajících pět čísel napsaných na stěnách tohoto tělesa. *(K. Černeková)*

6. Je dán rovnostranný trojúhelník XYZ s těžištěm T a stranou délky 5 cm. Sestrojte rovnoběžník $ABCD$ s obsahem 8 cm^2 a stranou AB délky 2 cm tak, aby body X, Y, Z, T ležely po řadě na přímkách AB, BC, CD, DA. *(M. Krállová)*

Kategorie C

1. Při dělení jistého přirozeného čísla čísly 19 a 99 vyjdou jako zbytky dvě prvočísla. Součet obou neúplných podílů se rovná 1 999. Určete dělené číslo. (*J. Šimša*)

2. Najděte všechny pravoúhlé trojúhelníky, ve kterých spojnice středů vepsané a opsané kružnice svírá s přeponou úhel 45 stupňů. (*M. Krállová*)

3. Zjistěte nejmenší přirozená čísla k, pro něž platí jednotlivá tvrzení a), b) a c): Obsadíme-li figurkami libovolných k polí šachovnice 8×8, pak budou obsazena některá

a) tři sousední pole některého řádku,
b) tři sousední pole některé šikmé řady,
c) čtyři sousední pole některého řádku nebo sloupce.

Šikmou řadou rozumíme takovou skupinu polí, jejichž úhlopříčky jednoho z obou směrů leží na jedné a téže přímce. (*J. Šimša*)

4. Jirka zhotovil papírový model pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ s podstavou $ABCD$. Když pak model rozřízl podél čtyř hran, bylo ho možno rozvinout (bez překrytí) do roviny. Kolik různých sítí daného jehlanu tak mohl Jirka dostat? Ukázalo se, že síť, kterou Jirka dostal, měla tvar (nekonvexního) sedmiúhelníku. Vypočtěte úhel AVB v boční stěně jehlanu. (*P. Leischner*)

5. V číselném výrazu

$$+1+2+3-4-5-6+7+8+9-10-11-12+\cdots+595+596+597-598-599-600),$$

ve kterém chybí levá závorka, jsou postupně vypsána všechna přirozená čísla od 1 do 600; před nimi se pravidelně opakují tři znaménka $+$ a tři znaménka $-$. Doplňte levou závorku do výrazu tak, aby vyšel výsledek 378. (*P. Černek*)

6. Je dán pravidelný šestiúhelník $KLMNOP$. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB tak, aby jeho vrchol C ležel na úsečce NP, body M, O, K ležely po řadě na přímkách AB, BC, CA a aby přímka NP rozdělila trojúhelník ABC na dvě části se stejným obsahem. (*K. Černeková*)