49. ročník Matematické olympiády

Úlohy domácího kola kategorie A

1. *Nechť $P(x)$, $Q(x)$ jsou kvadratické trojčleny takové, že tři z kořenů rovnice $P(Q(x))=0$ jsou čísla -22, 7, 13. Určete čtvrtý kořen této rovnice.*

Řešení. Vzhledem k tomu, že rovnice $P\bigl(Q(x)\bigr)=0$ má reálný kořen, má kvadratická rovnice $P(x)=0$ dva reálné kořeny r_1, r_2 (nevylučujeme, že $r_1=r_2$). Mnohočlen $P\bigl(Q(x)\bigr)$ lze proto zapsat ve tvaru

$$P\bigl(Q(x)\bigr)=a\bigl(Q(x)-r_1\bigr)\bigl(Q(x)-r_2\bigr),$$

kde a je reálné číslo $a\neq 0$. Rovnice $P\bigl(Q(x)\bigr)=0$ má podle zadání čtyři reálné kořeny, proto každá z kvadratických rovnic $Q(x)-r_1=0$, $Q(x)-r_2=0$ musí mít dva reálné kořeny. Z Viètových vzorců plyne, že součet kořenů v obou kvadratických rovnicích je týž, neboť obě rovnice mají stejný koeficient u lineárního členu. Přitom tři ze čtyř reálných kořenů obou kvadratických rovnic $Q(x)-r_1=0$, $Q(x)-r_2=0$ jsou dle zadání čísla -22, 7, 13, čtvrtý kořen označme q. Dále mohou nastat tři možnosti:

(i) Jedna z kvadratických rovnic má kořeny -22, 7, druhá má kořeny 13 a q. Pak platí $-22+7=13+q$, tedy $q=-28$.

(ii) Jedna z kvadratických rovnic má kořeny -22, 13, druhá má kořeny 7 a q. Pak platí $-22+13=7+q$, tedy $q=-16$.

(iii) Jedna z kvadratických rovnic má kořeny 13, 7, druhá má kořeny -22 a q. Potom však platí $13+7=-22+q$, tedy $q=42$.

Je zřejmé, že v každém z případů (i), (ii), (iii) existují příslušné kvadratické trojčleny $P(x)$ a $Q(x)$. Má-li mít jedna z kvadratických rovnic $Q(x)-r_1=0$, $Q(x)-r_2=0$ kořeny -22, 7 a druhá 13, -28, položíme $Q(x)=x^2+15x$, $r_1=(-22)\cdot 7=-154$, $r_2=13\cdot(-28)=-364$, $P(x)=(x+154)(x+364)=x^2+518x+56\,056$. Obdobně lze postupovat ve zbývajících případech.

Čtvrtým kořenem rovnice $P\bigl(Q(x)\bigr)=0$ může být kterékoliv z čísel -28, -16, 42.

Jiné řešení. Úvahy o koeficientu u lineárního členu s využitím Viètových vztahů lze nahradit následující úvahou o grafech kvadratických funkcí.

Protože grafy kvadratických funkcí $f_1\colon y=Q(x)-r_1$ a $f_2\colon y=Q(x)-r_2$ mají tutéž osu souměrnosti a přitom existují čtyři reálné kořeny rovnice $P(Q(x))=0$, jsou tyto kořeny na ose x po dvou středově souměrné podle průsečíku os souměrnosti grafů obou funkcí f_1 a f_2 s osou x. Vzhledem k poloze daných tří kořenů na ose x lze dále uvažovat tři možnosti stejně jako v předcházejícím řešení. Např.

(i) Střed souměrnosti je $-7{,}5 = \frac{-22+7}{2}$, čtvrtý kořen leží na ose x a je symetrický s obrazem čísla 13 dle středu souměrnosti v bodě $-7{,}5$. Čtvrtým hledaným kořenem je tudíž číslo -28.

Podobně lze postupovat ve zbylých dvou případech a dospějeme tak ke stejnému výsledku.

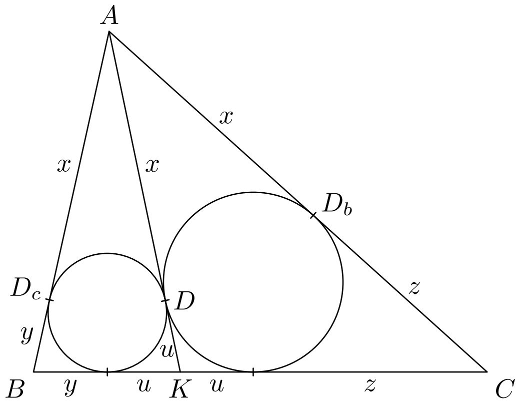
Návodné úlohy:

1. Odvoďte vztahy mezi kořeny a koeficienty kvadratické (kubické) rovnice.
2. Zjistěte, pro která reálná čísla p má rovnice
$$x^3 + px^2 + 2px = 3p + 1$$
tři různé reálné kořeny x_1, x_2 a x_3 takové, že $x_1x_2 = x_3^2$. [45. MO, B–I–1]
3. Dokažte, že rovnice $x^3-1996x^2+rx-1995 = 0$ má pro každý reálný koeficient r nejvýše jeden celočíselný kořen. [45. MO, B–II–3]
4. Najděte všechny dvojice mnohočlenů
$$f(x) = x^2 + ax + b, \qquad g(x) = x^2 + cx + d,$$
které splňují tyto podmínky
   1) Každý z mnohočlenů f, g má dva různé reálné kořeny.
   2) Je-li s libovolný kořen f, je i $g(s)$ kořen f.
   3) Je-li s libovolný kořen g, je i $f(s)$ kořen g. [46. MO, A–I–2]
5. Najděte všechna reálná čísla p, pro něž jsou všechny kořeny x_1, x_2, x_3 rovnice
$$x^3 - 12x^2 + px - 64 = 0$$
reálné a nezáporné. [35. MO, A–S–2]

2. *Nechť K, L, M jsou po řadě vnitřní body stran BC, CA, AB daného trojúhelníku ABC takové, že kružnice vepsané dvojicím trojúhelníků ABK a CAK, BCL a ABL, CAM a BCM mají vnější dotyk. Pak platí*
$$|BK| \cdot |CL| \cdot |AM| = |CK| \cdot |AL| \cdot |BM|.$$
Dokažte.

Poznámka. *Z uvedené rovnosti plyne na základě Cèvovy věty, že přímky AK, BL, CM procházejí týmž bodem.*

Řešení. Uvnitř strany BC trojúhelníku ABC uvažujme bod K takový, že kružnice vepsané trojúhelníkům BKA a CKA mají vnější dotyk v bodě D. Nechť dále (při obvyklém označení délek stran trojúhelníku ABC) platí označení podle obrázku 1, tj.
$$|AD_b| = |AD_c| = x,\ |BD_c| = y,\ |CD_b| = z,\ |BK| = y + u,\ |CK| = z + u.$$



Obr. 1

Z předešlého obrázku snadno vidíme, že platí následující soustava rovnic

$$\begin{aligned} y + z &= a - 2u, \\ z + x &= b, \\ x + y &= c. \end{aligned}$$

Jednoduchou úpravou odtud dostáváme $2y + 2u = a - b + c$ (analogicky vyjádříme $2z + 2u$), a tudíž platí

$$\begin{aligned} |BK| &= y + u = \frac{1}{2}(a - b + c) = s - b, \\ |CK| &= z + u = \frac{1}{2}(a + b - c) = s - c, \end{aligned}$$

kde $2s = a + b + c$. To značí (viz první návodná úloha), že bod K je bodem dotyku kružnice vepsané trojúhelníku ABC se stranou BC. Pro body L a M platí využitím analogického postupu následující vztahy:

$$|CL| = s - c, \quad |AL| = s - a, \quad |AM| = s - a, \quad |BM| = s - b.$$

Z předešlých rovností již bezprostředně plyne

$$|BK| \cdot |CL| \cdot |AM| = (s - a)(s - b)(s - c) = |CK| \cdot |AL| \cdot |BM|.$$

Tím je důkaz ukončen.

Návodné úlohy:

1. Pomocí délek stran a, b, c daného trojúhelníku ABC vyjádřete
   a) vzdálenosti vrcholů a bodů dotyku kružnice tomuto trojúhelníku vepsané, které leží na přilehlých stranách;
   b) vzdálenosti vrcholů a bodů dotyku kružnic vně připsaných přilehlým stranám (které leží na těchto stranách);
   c) vzdálenosti středů jeho stran a bodů dotyku kružnice danému trojúhelníku vepsané (vně připsané), které leží na jednotlivých stranách daného trojúhelníku.
2. Seznamte žáky s následující variantou Cèvovy věty: Nechť K, L, M jsou po řadě vnitřní body stran BC, CA, AB daného trojúhelníku ABC. Úsečky AK, BL, CM se protínají v jednom bodě uvnitř trojúhelníku ABC, právě když platí

$$\frac{|AM|}{|MB|} \cdot \frac{|BK|}{|KC|} \cdot \frac{|CL|}{|LA|} = 1.$$

   Větu dokažte, například podle [Švrček J., Vanžura J.: *Geometrie trojúhelníka*, SNTL Praha (1988)].

Poznámka. Úsečky AK, BL, CM vyhovující podmínkám úlohy se tedy protínají podle Cèvovy věty v jediném bodě G, zvaném *Gergonnův* bod daného trojúhelníku ABC.

3. *V oboru kladných čísel řešte soustavu*

$$\begin{aligned}\sqrt{xy} + \sqrt{xz} - x &= a,\\ \sqrt{yz} + \sqrt{yx} - y &= b,\\ \sqrt{zx} + \sqrt{zy} - z &= c,\end{aligned}$$

kde a, b, c jsou daná kladná čísla.

Řešení. Z textu úlohy plyne, že neznámé x, y, z jsou kladná čísla, lze proto danou soustavu upravit do následujícího tvaru

$$\begin{aligned}-\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} &= \frac{a}{\sqrt{x}},\\ \sqrt{x} - \sqrt{y} + \sqrt{z} &= \frac{b}{\sqrt{y}},\\ \sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{z} &= \frac{c}{\sqrt{z}}.\end{aligned}$$

Sečteme-li po dvojicích jednotlivé rovnice předešlé soustavy, dostaneme tak soustavu

$$
\begin{aligned}
\frac{b}{\sqrt{y}}+\frac{c}{\sqrt{z}}&=2\sqrt{x},\\
\frac{c}{\sqrt{z}}+\frac{a}{\sqrt{x}}&=2\sqrt{y},\\
\frac{a}{\sqrt{x}}+\frac{b}{\sqrt{y}}&=2\sqrt{z}.
\end{aligned}
$$

Dále po snadné úpravě

$$
\begin{aligned}
b\sqrt{z}+c\sqrt{y}&=2\sqrt{xyz},\\
c\sqrt{x}+a\sqrt{z}&=2\sqrt{xyz},\\
a\sqrt{y}+b\sqrt{x}&=2\sqrt{xyz}.
\end{aligned}
$$

Odečtením první a třetí, resp. druhé a třetí rovnice poslední soustavy dále získáme

$$
\begin{aligned}
b\sqrt{z}+(c-a)\sqrt{y}&=b\sqrt{x},\\
a\sqrt{z}-a\sqrt{y}&=(b-c)\sqrt{x}.
\end{aligned}
$$

Obě strany první rovnice předešlé soustavy násobíme číslem a, obě strany druhé rovnice pak násobíme číslem $-b$. Sečteme-li obě takto upravené rovnice, obdržíme

$$
a(b+c-a)\sqrt{y}=b(c+a-b)\sqrt{x},
$$

obdobným způsobem dostaneme rovněž

$$
a(b+c-a)\sqrt{z}=c(a+b-c)\sqrt{x}.
$$

Jestliže pro kladná čísla a, b, c platí vztah $b+c-a=0$, pak z předešlých dvou rovnic plyne, že také $a+b-c=0$, $c+a-b=0$. Potom však $a=b=c=0$, což není možné. Je tudíž $b+c-a\neq 0$. Z poslední dvojice rovnic vyjádříme $\sqrt{y}$ a $\sqrt{z}$ pomocí $\sqrt{x}$ následujícím způsobem:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{y}&=\frac{b(c+a-b)}{a(b+c-a)}\sqrt{x},\\
\sqrt{z}&=\frac{c(a+b-c)}{a(b+c-a)}\sqrt{x}.
\end{aligned}
$$

Odtud snadno vidíme, že výrazy $b+c-a$, $c+a-b$, $a+b-c$ jsou současně všechny kladné nebo všechny záporné. Po dosazení $\sqrt{y}$ a $\sqrt{z}$ do původní soustavy rovnic získáme (po úpravách) řešení (x, y, z), kde

$$\begin{aligned} x &= \frac{a^2(b+c-a)}{(c+a-b)(a+b-c)}, \\ y &= \frac{b^2(c+a-b)}{(b+c-a)(a+b-c)}, \\ z &= \frac{c^2(a+b-c)}{(c+a-b)(b+c-a)}. \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že jsme k řešení soustavy rovnic dospěli výhradně ekvivalentními úpravami, není třeba zkoušku provádět.

Soustava má přitom výše uvedené řešení v oboru kladných čísel, právě když současně platí následující podmínky $b+c-a>0$, $c+a-b>0$, $a+b-c>0$, tj. právě když kladná čísla a, b, c jsou délkami stran trojúhelníku.

Návodné úlohy:

1. Řešte soustavu

$$\begin{aligned} \sqrt{xy} + \sqrt{x} &= 8, \\ \sqrt{yx} - \sqrt{y} &= 3. \end{aligned}$$

[$x = 16$, $y = 1$ nebo $x = 4$, $y = 9$]

2. Řešte soustavu

$$\begin{aligned} \frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} - \frac{1}{yz} &= 8, \\ \frac{1}{yx} + \frac{1}{yz} - \frac{1}{xz} &= 4, \\ \frac{1}{zx} + \frac{1}{zy} - \frac{1}{xy} &= 4. \end{aligned}$$

[$x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{2}$, $z = \frac{1}{2}$ nebo $x = -\frac{1}{3}$, $y = -\frac{1}{2}$, $z = -\frac{1}{2}$]

3. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x(y+z) &= 1, \\ y(z+x) &= 1, \\ z(x+y) &= p \end{aligned}$$

s parametrem p. Proveďte diskusi vzhledem k parametru p. [41. MO, A–II–1]

4. *V rovině je dáno* 1999 *shodných trojúhelníků o obsahu* 1, *které jsou obrazy téhož trojúhelníku v různých posunutích. Je-li průnikem všech daných trojúhelníků množina* M, *která obsahuje těžiště každého z nich, je obsah množiny* M *alespoň* $\frac{1}{9}$. *Dokažte.*

Řešení. Nechť $A_sB_sC_s$, kde $s \in \{1, 2, \ldots, 1999\}$, jsou trojúhelníky vyhovující podmínkám úlohy a XYZ nechť značí polorovinu s hraniční přímkou XY a vnitřním bodem Z. Každý z daných trojúhelníků $A_sB_sC_s$ je průnikem vždy tří polorovin $A_sB_sC_s$, $B_sC_sA_s$ a $C_sA_sB_s$, proto je (neprázdná) množina M průnikem $3 \cdot 1\,999 = 5\,997$ takových polorovin. Vzhledem k tomu, že poloroviny $A_sB_sC_s$, kde $s \in \{1, 2, \ldots, 1999\}$, se navzájem liší jen posunutím, je jejich průnikem polorovina $A_iB_iC_i$, kde i je pevný index z množiny $\{1, 2, \ldots, 1999\}$. Podobně průnikem všech polorovin $B_sC_sA_s$ je určitá polorovina $B_jC_jA_j$ a průnikem všech polorovin $C_sA_sB_s$ je určitá polorovina $C_kA_kB_k$, kde $j, k \in \{1, 2, \ldots, 1999\}$.

Množina M je proto průnikem tří výše zmíněných polorovin $A_iB_iC_i$, $B_jC_jA_j$ a $C_kA_kB_k$, M je tedy trojúhelník ABC, kde A je průsečík přímek A_iB_i a C_kA_k, B je průsečík přímek A_iB_i a B_jC_j a konečně C je průsečík přímek B_jC_j a C_kA_k. Tento trojúhelník je podobný všem trojúhelníkům $A_sB_sC_s$, přičemž pro poměr podobnosti λ platí $0 < \lambda \leqq 1$. (Případ $A = B = C$ lze dle textu úlohy vyloučit.)

Vzhledem k tomu, že obsah trojúhelníku ABC je λ^2, stačí dokázat, že $\lambda \geqq \frac{1}{3}$. Označme v výšku z vrcholu C_i na stranu A_iB_i v trojúhelníku $A_iB_iC_i$. Protože přímka A_iB_i je totožná s přímkou AB, je vzdálenost těžiště T_i trojúhelníku $A_iB_iC_i$ od přímky AB rovna $\frac{1}{3}v$. Podle zadání obsahuje množina M těžiště všech trojúhelníků $A_sB_sC_s$, musí tudíž obsahovat těžiště T_i trojúhelníku $A_iB_iC_i$.

Vzdálenost vrcholu C trojúhelníku ABC od jeho strany AB je tedy alespoň $\frac{1}{3}v$. Porovnáním velikostí výšek z vrcholů C_i a C v podobných trojúhelnících $A_iB_iC_i$ a ABC dostáváme již přímo žádanou nerovnost $\lambda \geqq \frac{1}{3}$, tj. $\lambda^2 \geqq \frac{1}{9}$, což jsme chtěli dokázat.

Doplňující úlohy:

1. V rovině je dáno 1999 shodných obdélníků o obsahu 1, které jsou obrazy téhož obdélníku v různých posunutích. Je-li průnikem všech daných obdélníků množina M, která obsahuje průsečík úhlopříček každého z nich, je obsah množiny M alespoň $\frac{1}{4}$. Dokažte.
2. Je dána úsečka AB. Množina bodů M je definována takto:
   a) M obsahuje body A, B.
   b) Obsahuje-li M body X a Y, obsahuje i bod Z úsečky XY, pro který platí $|YZ| = 3|XZ|$.
3. Dokažte, že každá úsečka, která je částí úsečky AB, obsahuje alespoň jeden bod množiny M. [17. MO, A–I–1]

5. *Je dána funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taková, že $f(n) = 1$, je-li n liché, a $f(n) = k$ pro každé sudé číslo $n = 2^k l$, kde k je přirozené číslo a l číslo liché. Určete největší přirozené číslo n, pro něž platí*

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(n) \leqq 123\,456.$$

Řešení. Označme

$$S(n) = f(1) + f(2) + \ldots + f(n).$$

Ze zadání plyne $S(1) = 1$. Protože $f(n) \geqq 1$ pro všechna přirozená čísla n, je $S\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rostoucí funkce. Je-li n přirozené číslo tvaru $n = 2^k$, kde k je přirozené, určíme součet $S(n)$ následujícím způsobem: Počet lichých čísel, která nejsou větší než n, je 2^{k-1}. Každé liché číslo se na součtu $S(n)$ podílí hodnotou 1. Počet sudých čísel, která nejsou větší než n, je rovněž 2^{k-1}, přitom každé sudé číslo se na součtu $S(n)$ podílí hodnotou minimálně 1. Je-li navíc toto číslo dělitelné čtyřmi, podílí se na součtu další 1. Je-li dále číslo dělitelné osmi, podílí se další 1, atd. (Hodnotu $S(n)$ tak tvoříme načítáním hodnot 1 „po vrstvách"). Celkem je tedy

$$\begin{aligned} S(2^k) &= 2^{k-1} + 2^{k-1} + 2^{k-2} + \ldots + 2 + 1 = 2^{k-1} + \frac{2^k - 1}{2 - 1} = \\ &= 2^k + 2^{k-1} - 1 = 3 \cdot 2^{k-1} - 1. \end{aligned}$$

Nechť p je přirozené číslo, které lze zapsat ve tvaru $p = 2^m s$, kde m je celé nezáporné číslo a s liché přirozené číslo. Nechť k je přirozené číslo takové, že $p < 2^k$ (tedy $m < k$), a nechť l je liché přirozené číslo. Pak

$$f(2^k l + p) = f(2^k l + 2^m s) = f\bigl(2^m(2^{k-m} l + s)\bigr).$$

Číslo $2^{k-m} l + s$ je liché, proto $f\bigl(2^m(2^{k-m} l + s)\bigr) = f(2^m s) = f(p)$. Celkem tedy dostáváme $f(2^k l + p) = f(p)$.

Jsou-li k, m nezáporná celá čísla, $k > m$, a l liché číslo, platí podle předcházejícího odstavce

$$\begin{aligned} S(2^k l + 2^m) &= f(1) + f(2) + \ldots + f(2^k l) + f(2^k l + 1) + f(2^k l + 2) + \ldots + \\ &\qquad + f(2^k l + 2^m) = \\ &= f(1) + f(2) + \ldots + f(2^k l) + f(1) + f(2) + \ldots + f(2^m) = \\ &= S(2^k l) + S(2^m). \end{aligned}$$

A odtud již matematickou indukcí lehce dokážeme, že jsou-li $k_1 > k_2 > \ldots > k_i$ nezáporná celá čísla, pak platí

$$S(2^{k_1} + 2^{k_2} + \ldots + 2^{k_i}) = S(2^{k_1}) + S(2^{k_2}) + \ldots + S(2^{k_i}).$$

Největší nezáporné celé číslo k_1 takové, že $3 \cdot 2^{k_1 - 1} - 1 = S(2^{k_1}) \leqq 123\,456$, je $k_1 = 16$. Přitom $S(2^{16}) = 98\,303$.

Největší nezáporné celé číslo k_2 takové, že $3\cdot 2^{k_2-1}-1 = S(2^{k_2}) \leqq 123\,456 - 98\,303 = 25\,153$, je $k_2 = 14$. Přitom $S(2^{14}) = 24\,575$.

Největší nezáporné celé číslo k_3 takové, že $3\cdot 2^{k_3-1}-1 = S(2^{k_3}) \leqq 25\,153 - 24\,575 = 578$, je $k_3 = 8$. Přitom $S(2^8) = 383$.

Největší nezáporné celé číslo k_4 takové, že $3\cdot 2^{k_4-1}-1 = S(2^{k_4}) \leqq 578 - 383 = 195$, je $k_4 = 7$. Přitom $S(2^7) = 191$.

Největší nezáporné celé číslo k_5 takové, že $3\cdot 2^{k_5-1}-1 = S(2^{k_5}) \leqq 195 - 191 = 4$, je $k_5 = 1$. Přitom $S(2^1) = 2$.

Největší nezáporné celé číslo k_6 takové, že $S(2^{k_6}) \leqq 4 - 2 = 2$, je $k_6 = 0$. Přitom $S(2^0) = 1$.

Tedy

$$\begin{aligned} S(82\,307) &= S(2^{16} + 2^{14} + 2^8 + 2^7 + 2 + 1) = \\ &= S(2^{16}) + S(2^{14}) + S(2^8) + S(2^7) + S(2) + S(1) = \\ &= 123\,455 \leqq 123\,456. \end{aligned}$$

Přitom $S(82\,308) = S(82\,307) + f(82\,308) = 123\,455 + 2 = 123\,457 > 123\,456$.

Největší přirozené číslo n, pro něž platí $S(n) \leqq 123\,456$, je $n = 82\,307$.

Jiné řešení. Na základě úvahy o načítání hodnot „po vrstvách“ jako v předešlém řešení zjistíme, že

$$S(n) = n + \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{16} \right\rfloor + \dots .$$

Přitom $\lfloor r \rfloor$ znamená celou část reálného čísla r, což je největší celé číslo, které není větší než r.

Protože pro každé reálné číslo r platí $\lfloor r \rfloor \leqq r$, platí též

$$S(n) \leqq n + \frac{n}{4} + \frac{n}{8} + \dots = \frac{n}{2} + \frac{n}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots\right) = \frac{n}{2} + n = \frac{3n}{2}.$$

Největší přirozené číslo n, pro něž platí, že $\frac{3n}{2} \leqq 123\,456$, je $n = 82\,304$. Přitom

$$\begin{aligned} S(82\,304) &= 82\,304 + \left\lfloor \frac{82\,304}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{82\,304}{8} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{82\,304}{16} \right\rfloor + \dots + \\ &\quad + \left\lfloor \frac{82\,304}{65\,536} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{82\,304}{131\,072} \right\rfloor + \dots = \\ &= 82\,304 + 20\,576 + 10\,288 + 5\,144 + 2\,572 + 1\,286 + 643 + \\ &\quad + 321 + 160 + 80 + 40 + 20 + 10 + 5 + 2 + 1 + 0 + 0 + \dots = \\ &= 123\,452. \end{aligned}$$

Dále

$$\begin{aligned}
S(82\,305) &= S(82\,304) + f(82\,305) = 123\,452 + 1 = 123\,453,\\
S(82\,306) &= S(82\,305) + f(82\,306) = 123\,453 + 1 = 123\,454,\\
S(82\,307) &= S(82\,306) + f(82\,307) = 123\,454 + 1 = 123\,455,\\
S(82\,308) &= S(82\,307) + f(82\,308) = 123\,455 + 2 = 123\,457.
\end{aligned}$$

Největší přirozené číslo n, pro něž $S(n) \leqq 123\,456$, je tedy $n = 82\,307$.

Doplňující úlohy:

1. Nechť m je přirozené číslo, p prvočíslo. Označme

$$m!! = \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot m & \text{pro } m \text{ liché},\\ 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot m & \text{pro } m \text{ sudé} \end{cases}$$

tzv. dvojný faktoriál. Určete nejvyšší mocninu prvočísla p, která ještě dělí číslo $m!!$ [34. MO, A–I–2]

2. Je dána funkce f spojitá na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ a s hodnotami $f(0) = f(1) = 1$, jež pro každá dvě čísla $x \leqq y$ z intervalu $\langle 0, 1\rangle$ splňuje rovnici

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{2}{3} f(x) + \frac{1}{3} f(y).$$

Určete $f(\frac{1}{7})$. [40. MO, A–I–6]

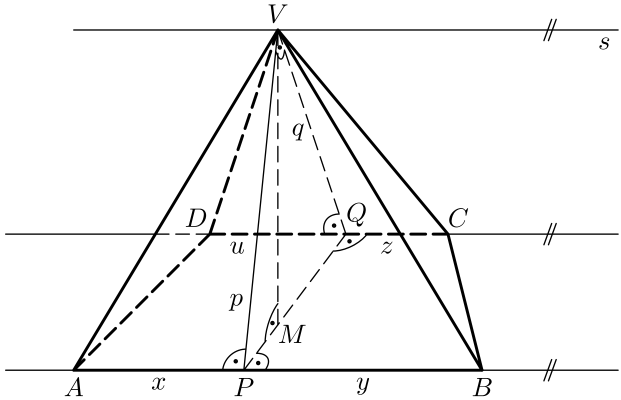
6. *Je dán čtyřboký jehlan $ABCDV$ s podstavou $ABCD$. Jeho hrany AB, CD jsou rovnoběžné a roviny ABV a CDV vzájemně kolmé. Označme P patu výšky z vrcholu V na stranu AB v trojúhelníku ABV a Q patu výšky z vrcholu V na stranu CD v trojúhelníku CDV. Dokažte nerovnost*

$$|AV|^2 + |BV|^2 + |CV|^2 + |DV|^2 \geqq |PQ|^2 + 2(S_{ABV} + S_{CDV} + S_{PQV}),$$

kde S_{XYZ} značí obsah trojúhelníku XYZ. Zjistěte rovněž, kdy platí rovnost.

Řešení. Přímka AB je průsečnicí roviny ABV s rovinou podstavy $ABCD$ čtyřbokého jehlanu $ABCDV$, podobně přímka CD je průsečnicí roviny CDV s rovinou podstavy $ABCD$ uvažovaného jehlanu. Vzhledem k tomu, že obě průsečnice jsou dle zadání rovnoběžné, je rovněž průsečnice s rovin ABV a CDV s nimi rovnoběžná (obr. 2). Rovina kolmá k přímce s, procházející vrcholem V daného jehlanu, protíná přímky AB, CD po řadě v bodech P, Q, které jsou patami výšek z vrcholu V po řadě na strany AB, CD v trojúhelnících ABV, CDV. Roviny ABV a CDV jsou podle zadání vzájemně kolmé, trojúhelník PQV má proto pravý úhel u vrcholu V. Pata M výšky z vrcholu V na přeponu PQ je přitom totožná s patou tělesové výšky z vrcholu V jehlanu $ABCDV$. Pro polohu bodů P a Q na přímce AB, resp. CD, je třeba dále rozlišit tři případy:

(i) Oba body P a Q leží na odpovídajících hranách AB, CD.
(ii) Jeden z bodů P, Q leží na odpovídající hraně, druhý na prodloužení odpovídající hrany.
(iii) Žádný z bodů P, Q neleží na odpovídající hraně.



Obr. 2

Dokážeme dále nerovnost z textu úlohy pro případ (i). Zaveďme označení ve shodě s obrázkem 2, tj.

$$|AP| = x,\ |BP| = y,\ |CQ| = z,\ |DQ| = u,\ |VP| = p,\ |VQ| = q.$$

Využitím Pythagorovy věty v pravoúhlých trojúhelnících APV, BPV, CQV, DQV a PQV dostáváme postupně vztahy:

$$|AV|^2 = x^2 + p^2, \quad |BV|^2 = y^2 + p^2, \quad |CV|^2 = z^2 + q^2,$$
$$|DV|^2 = u^2 + q^2, \quad |PQ|^2 = p^2 + q^2.$$

Pro obsahy trojúhelníků ABV, CDV a PQV platí vzorce

$$2S_{ABV} = (x + y)p, \quad 2S_{CDV} = (z + u)q, \quad 2S_{PQV} = pq.$$

Dosadíme-li nyní za $|AV|^2$, $|BV|^2$, $|CV|^2$, $|DV|^2$, $|PQ|^2$ a $2S_{ABV}$, $2S_{CDV}$, $2S_{PQV}$ do nerovnosti v textu úlohy, dostáváme po snadné úpravě

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + p^2 + q^2 \geqq xp + yp + zq + uq + pq.$$

Nyní dokážeme, že předešlá nerovnost platí pro libovolná nezáporná reálná čísla x, y, z, u a libovolná kladná čísla p, q. Vynásobením rozdílu levé a pravé strany této nerovnosti číslem 4 dostáváme po úpravě

$$(4x^2 - 4xp + p^2) + (4y^2 - 4yp + p^2) + (4z^2 - 4zq + q^2) + (4u^2 - 4uq + q^2)+$$
$$+2(p^2 - 2pq + q^2) = (2x - p)^2 + (2y - p)^2 + (2z - q)^2 + (2u - q)^2 + 2(p - q)^2 \geqq 0.$$

Vzhledem k tomu, že všechny provedené úpravy byly ekvivalentní, platí též nerovnost uvedená v textu úlohy, což jsme měli dokázat.

Podobně lze postupovat i v případech (ii) a (iii). Odlišné je zde pouze vyjádření hodnot $2S_{ABV}$ a $2S_{CDV}$.

Rovnost může nastat pouze v případě (i), ve zbylých dvou případech je vyloučena. V případě (i) přitom rovnost nastává, právě když platí

$$2x = 2y = 2z = 2u = p = q,$$

tj. právě když podstavou daného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ je obdélník $ABCD$, pata M výšky VM uvažovaného jehlanu je průsečíkem úhlopříček AC a BD v obdélníku $ABCD$ a současně platí

$$|AB| : |BC| : |VM| = 4 : 2\sqrt{2} : \sqrt{2}.$$

Návodné úlohy:

1. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla x, y platí nerovnost
$$5x^2 + y^2 + 1 \geqq 2x(2 + y).$$
Zjistěte, kdy nastává rovnost. [Rovnost nastává, právě když $x = y = \frac{1}{2}$]
2. Označme a, b, c, d, e, f velikosti hran čtyřstěnu a S jeho povrch. Dokažte nerovnost
$$S \leqq \frac{\sqrt{3}}{6}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2)$$
[41. MO, A–III–2]
3. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla a, b, c, d, e platí nerovnost
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geqq (a + b + c + d)e.$$
Zjistěte, kdy nastává rovnost. [Rovnost nastává, právě když $2a = 2b = 2c = 2d = e$.]
4. Dokažte, že pro libovolná kladná čísla x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 platí nerovnost
$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2 \geqq 4(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1).$$