Úlohy domácího kola kategorie B

1. *Pro která reálná čísla t má funkce $f(x) = 5x + 44 + t|x - 2| - 3|x - t|$ maximum rovné 0?*

Daná funkce je lineární lomená, protože obsahuje dva výrazy s absolutní hodnotou, které způsobují, že jejím grafem není přímka, nýbrž lomená čára. Její definiční obor, množinu $\mathbb{R}$ všech reálných čísel, můžeme v tomto případě rozdělit na tři disjunktní části podle toho, jak se příslušná absolutní hodnota chová (zda je výraz v absolutní hodnotě kladný, či záporný). Protože jedna z absolutních hodnot závisí na parametru t, rozlišíme, zda je $t < 2$ (případ A), či $t \geqq 2$ (případ B).

Žákům prospěje, když si nejdříve nakreslí několik grafů zkoumané funkce pro konkrétní hodnoty parametru t.

Řešení 1. Rozlišíme dva případy, podle toho, zda je $t < 2$ (případ A), či $t \geqq 2$ (případ B).

A. Nechť $t < 2$. Množina $\mathbb{R}$ se nám rozpadne na tři disjunktní intervaly, $\mathbb{R} = (-\infty, t\rangle \cup (t, 2\rangle \cup (2, \infty)$.

(a) V intervalu $(-\infty, t\rangle$ je, jak snadno spočteme, $f(x) = (8 - t)x + 44 - t$. Protože za uvedeného předpokladu je $8 - t > 0$, je funkce f v tomto intervalu rostoucí a nabyde maxima v bodě $x = t$.

(b) V intervalu $(t, 2\rangle$ je $f(x) = (2 - t)x + 44 + 5t$. Protože za uvedeného předpokladu je $2 - t > 0$, je funkce f i v tomto intervalu rostoucí a nabyde maxima v bodě $x = 2$. Přitom zřejmě platí $f(t) < f(2) = 2(2 - t) + 44 + 5t$.

(c) V intervalu $(2, \infty)$ je $f(x) = (2 + t)x + 44 + t$. Tato funkce je pro $2 + t > 0$ na tomto intervalu rostoucí a shora neomezená, takže nemůže mít maximum. Musí tedy nutně být $2 + t \leqq 0$, tj. $t \leqq -2$, funkce f bude v intervalu $(2, \infty)$ nerostoucí a její hodnota nebude větší než $f(2)$, kterou jsme spočítali v (b).

Zjistili jsme tedy, že za předpokladu $t < 2$ nabývá funkce f maxima jedině pro $t \leqq -2$, přičemž její maximum je $f(2) = 2(2 - t) + 44 + 5t$. Toto maximum se rovná 0, právě když $2(2 - t) + 44 + 5t = 0$, neboli $t = -16$, což je naštěstí číslo, které splňuje podmínku $t \leqq -2$.

B. Nechť $t \geqq 2$. Množina $\mathbb{R}$ se nám rozpadne na tři disjunktní intervaly, $\mathbb{R} = (-\infty, 2\rangle \cup (2, t\rangle \cup (t, \infty)$, přičemž prostřední „interval“ bude prázdný pro $t = 2$ (to však není pro další úvahy podstatné, jinak bychom mohli tento případ snadno rozebrat samostatně).

V intervalu $(-\infty, 2\rangle$ je $f(x) = (8 - t)x + 44 - t$. Kdyby teď bylo $8 - t < 0$, byla by funkce f v tomto intervalu klesající a shora neomezená, takže by nemohla mít maximum. Proto je $8 - t \geqq 0$, tj. $t \leqq 8$. Pak ale je $f(2) = 2(8 - t) + 44 - t = 60 - 3t > 0$. Odtud hned vidíme, že za uvedeného předpokladu nemůže funkce f nikdy mít maximum rovné 0.

Z uvedeného rozboru vyplývá, že uvažovaná funkce má maximum rovné 0 jedině pro $t = -16$.

Řešení 2. Víme, že grafem dané funkce f je lomená čára, která se v našem případě skládá ze dvou polopřímek (pro $t = 2$), resp. ze dvou polopřímek a jedné úsečky (návodná úloha 1).

Dále bychom si měli uvědomit, že pokud má takováto funkce maximum, nabývá ho určitě v některém ze „zlomových“ bodů (tam, kde je příslušný výraz v absolutní hodnotě nulový). To samozřejmě neznamená, že funkce nemůže maximum nabýt i v jiných bodech (je-li konstantní na některém intervalu, návodná úloha 2).

V našem případě jsou těmito zlomovými body pro $x = 2$ bod $A(2, 54 - 3|t - 2|)$, pro $x = t$ bod $B(t, 5t + 44 + t|t - 2|)$.

Protože jeden z bodů $x = 2$, $x = t$ má být bodem maxima funkce f rovného 0, zjistíme, pro která t je jedna z y-ových souřadnic bodů A a B nulová (a druhá nekladná).

A: $54 - 3|t - 2| = 0$,
$|t - 2| = 18$,
$t = 20$ anebo $t = -16$.

B: $5t + 44 + t|t - 2| = 0$,
$t \geqq 2 \Rightarrow t^2 + 3t + 44 = 0$,
nemá řešení.
$t < 2 \Rightarrow t^2 - 7t - 44 = 0$.
$t = 11$ anebo $t = -4$,
vyhovuje jen $t = -4$.

Máme tak tři možnosti:

Pro $t = 20$ je $A(2, 0)$, $B(20, 504)$, což nevyhovuje.

Pro $t = -16$ je $A(2, 0)$, $B(-16, -80 + 11 - 16 \cdot 18)$, zatím vyhovuje.

Pro $t = -4$ je $A(2, 36)$, $B(-4, 0)$, což nevyhovuje.

Zjistili jsme, že úloha má řešení nejvýše pro $t = -16$, kterému odpovídá funkce $f(x) = 5x + 44 - 16|x - 2| - 3|x + 16|$. Pro tuto funkci samozřejmě platí $f(2) = 0$. Ověřit, že tato hodnota je skutečně maximem funkce f, můžeme více způsoby. Například tak, že ověříme, že pro $x < -16$ je uvedená funkce neklesající (pro $x < -16$ je $f(x) = 24x + 60$) a současně pro $x > 2$ nerostoucí (pro $x > 2$ je $f(x) = -14x + 28$).

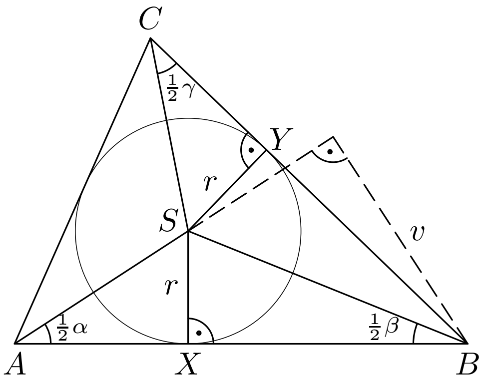
Návodné úlohy:

1. Načrtněte grafy funkcí a) $y = 2x - 5 + |2x - 7|$, b) $y = x - |8 - x|$, c) $y = |x + 6| + |3x - 2|$, d) $y = 3x - 5 + |x - 4| - |2x + 5|$.
2. Načrtněte takovou lomenou čáru složenou ze 3 (4) částí, která je grafem nějaké funkce definované na $\mathbb{R}$ a
   a) má maximum -2 v bodě 5,
   b) má maximum 7 v bodě 1 a minimum 6 v bodě -5,
   c) má aspoň dva body, v kterých má maximum.

2. *Označme S střed kružnice vepsané libovolnému trojúhelníku ABC. Dokažte, že rovnost $|AS| \cdot |BS| = |CS| \cdot |AB|$ platí, právě když je úhel ACB pravý.*

Tato úloha patří mezi ty vděčné úlohy, které se dají řešit více způsoby. My uvedeme tři řešení.

Řešení 1. Úhly v obecném trojúhelníku ABC označme obvyklým způsobem, poloměr vepsané kružnice označme r a její dotykové body se stranami AB, BC označme po řadě X, Y (obr. 1).



Obr. 1

Úsečky AS a BS jsou stranami trojúhelníku ASB. Jeho obsah můžeme vyjádřit dvěma způsoby:

$$S(ASB) = \frac{1}{2}|AS|v = \frac{1}{2}|AB|r,$$

neboť výška na stranu AB tohoto trojúhelníku je r; pro výšku v na stranu AS přitom platí $v = |BS| \cos \frac{1}{2}\gamma$, protože vedlejší úhel při vrcholu S má velikost $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta = 90° - \frac{1}{2}\gamma$. Je tedy

$$|AS| \cdot |BS| \cos \frac{\gamma}{2} = |AB|r$$

a následující rovnosti jsou ekvivalentní:

$$\begin{aligned} |AS| \cdot |BS| &= |CS| \cdot |AB|, \\ |AB|r &= |CS| \cdot |AB| \cos \frac{\gamma}{2}, \\ r &= |CS| \cos \frac{\gamma}{2}. \end{aligned} \tag{1}$$

V pravoúhlém trojúhelníku CSY však platí $\cos \frac{\gamma}{2} = \frac{|CY|}{|CS|}$, takže rovnost (1) je ekvivalentní rovnosti

$$r = |CY|,$$

což znamená, že trojúhelník CSY je rovnoramenný pravoúhlý a $\frac{1}{2}\gamma = 45°$. Je tedy daná rovnost ekvivalentní tomu, že $\gamma = 90°$.

Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

Řešení 2. Napíšeme si daný vztah jako rovnost podílů tak, aby to byly poměry stran v trojúhelnících, a budeme se snažit použít podobnost nebo sinovou větu.

V našem případě vyjdeme z rovnosti $\frac{|AS|}{|CS|} = \frac{|AB|}{|BS|}$. Trojúhelníky ASC a BSC ale podobné nejsou, proto zkusíme sinovou větu:

V trojúhelníku ASC platí $\dfrac{|AS|}{|CS|} = \dfrac{\sin\frac12\gamma}{\sin\frac12\alpha}$ a v trojúhelníku ASB zase $\dfrac{|AB|}{|BS|} = \dfrac{\sin|\sphericalangle ASB|}{\sin\frac12\alpha}$. Odtud dostáváme následující ekvivalentní rovnosti:

$$
\begin{aligned}
\frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} &= \frac{\sin|\sphericalangle ASB|}{\sin\frac{\alpha}{2}},\\
\sin\frac{\gamma}{2} &= \sin|\sphericalangle ASB|,\\
\sin\frac{\gamma}{2} &= \sin\Big(90^\circ + \frac{\gamma}{2}\Big),\\
\frac{\gamma}{2} &= 180^\circ - \Big(90^\circ + \frac{\gamma}{2}\Big),\\
\gamma &= 90^\circ.
\end{aligned}
$$

Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

Řešení 3. Zkusíme vypočítat délky úseček AS, BS, CS, AB pomocí některých prvků trojúhelníku. My si zvolíme úhly trojúhelníku a poloměr r.

Zřejmě $|CS| = \dfrac{r}{\sin\frac12\gamma}$, $|AS| = \dfrac{r}{\sin\frac12\alpha}$, $|BS| = \dfrac{r}{\sin\frac12\beta}$ a $|AB| = |AX| + |BX| = r\operatorname{cotg}\frac12\alpha + r\operatorname{cotg}\frac12\beta$. Po dosazení dostaneme ekvivalentní rovnosti

$$
\begin{aligned}
\frac{r}{\sin\frac12\alpha}\cdot\frac{r}{\sin\frac12\beta} &= \Big(r\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} + r\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}\Big)\cdot\frac{r}{\sin\frac12\gamma},\\
\sin\frac{\gamma}{2} &= \cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2},\\
\sin\frac{\gamma}{2} &= \sin\Big(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\Big),\\
\sin\frac{\gamma}{2} &= \sin\Big(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\Big),\\
\sin\frac{\gamma}{2} &= \cos\frac{\gamma}{2},\\
\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} &= 1,\\
\gamma &= 90^\circ.
\end{aligned}
$$

Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

3. *Určete reálná čísla a, b, pro která má soustava*

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 + 2z^2 &= 16,\\
xyz^2 + xy + z^2 &= a,\\
x + y + 2z &= b
\end{aligned}
$$

v oboru reálných čísel právě jedno řešení.

Přirozeným pokusem je danou soustavu úplně vyřešit vzhledem k parametrům a, b a z tohoto řešení zjistit, pro která a, b má soustava právě jedno řešení. Domníváme se však, že to je v tomto případě poněkud neschůdná cesta. Dvě neznámé sice můžeme vyloučit (například x a y), ale výslednou rovnici čtvrtého stupně s dvěma parametry nebudou žáci schopni řešit.

Budeme se proto snažit hned od začátku využít skutečnost, že soustava má mít právě jedno řešení.

Řešení. Předpokládejme, že soustava má právě jedno řešení $x = s$, $y = t$, $z = u$. Protože ve všech rovnicích se neznámé x a y vyskytují ve stejném tvaru, lze vytušit a ověřit, že i $x = t$, $y = s$ a $z = u$ je řešením dané soustavy. A protože soustava má jediné řešení, musí být $t = s$, a tedy $x = y$. Po dosazení dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} x^2 + z^2 &= 8, \\ x^2z^2 + x^2 + z^2 &= a, \\ x + z &= \tfrac{1}{2}b. \end{aligned} \tag{$*$}$$

Pokud (x, z) je některé řešení této soustavy, je trojice (x, x, z) řešením původní soustavy. Má-li proto původní soustava jediné řešení, musí taková být i nová soustava $(*)$. Ta je však opět symetrická vůči neznámým x a z. Proto bude mít jediné řešení, jen když bude platit $x = z$.

Po dosazení dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} x^2 &= 4, \\ x^4 + 2x^2 &= a, \\ x &= \tfrac{1}{4}b, \end{aligned}$$

která má jediné řešení. Podle první rovnice je to buď $x = 2$ (pak $b = 8$, $a = 24$), anebo $x = -2$ (pak $b = -8$, $a = 24$).

Těmito úvahami jsme dospěli k následujícímu závěru:

Pokud má daná soustava právě jedno řešení, tak jen pro $a = 24$, $b = 8$, a to $x = 2$, $y = 2$, $z = 2$, anebo pro $a = 24$, $b = -8$, a to $x = -2$, $y = -2$, $z = -2$.

Ještě musíme ověřit, zda v těchto dvou případech nemá daná soustava jiné řešení (než to symetrické, které jsme vypočetli nikoli ekvivalentními úpravami, nýbrž zjednodušováním).

Nechť $a = 24$, $b = 8$. Po dosazení dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2z^2 &= 16, \\ xyz^2 + xy + z^2 &= 24, \\ x + y + 2z &= 8. \end{aligned}$$

Tato soustava se dá řešit více způsoby. My tu uvedeme dva.

a) Vyloučíme neznámé x, y, například tak, že nejprve rovnice upravíme:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 16 - 2z^2, \\ xy &= \frac{24 - z^2}{1 + z^2}, \\ x + y &= 8 - 2z. \end{aligned}$$

Dostáváme tak

$$(8 - 2z)^2 = (x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 16 - 2z^2 + 2 \cdot \frac{24 - z^2}{1 + z^2}.$$

Po úpravě vychází

$$3z^4 - 16z^3 + 28z^2 - 16z = 0.$$

Vzhledem k tomu, že víme, že $z = 2$ je kořenem této rovnice, můžeme ji postupně upravit až na tvar

$$z(z - 2)^2(3z - 4) = 0.$$

Odtud plyne, že je buď $z = 0$, $z = \frac{4}{3}$, anebo $z = 2$.

Pokud $z = 0$, dostaneme

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 16, \\ xy &= 24, \\ x + y &= 8 \end{aligned}$$

a snadno se přesvědčíme, že tato soustava nemá řešení (čísla x, y by musela být kořeny kvadratické rovnice $t^2 - 8t + 24 = 0$, která má záporný diskriminant).

Pokud $z = \frac{4}{3}$, dostaneme

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \frac{112}{9}, \\ xy &= 8, \\ x + y &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

a opět se snadno přesvědčíme, že tato soustava nemá řešení.

Pokud $z = 2$, dostaneme

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 8, \\ xy &= 4, \\ x + y &= 4. \end{aligned}$$

Snadno zjistíme, že tato soustava má jediné řešení $x = y = 2$.

b) Šikovnější přístup využívá jen první a třetí rovnici a nerovnost mezi kvadratickým a aritmetickým průměrem:

$$4 = 2^2 = \left(\frac{1}{4}(x + y + z + z)\right)^2 \leqq \frac{1}{4}(x^2 + y^2 + z^2 + z^2) = 4.$$

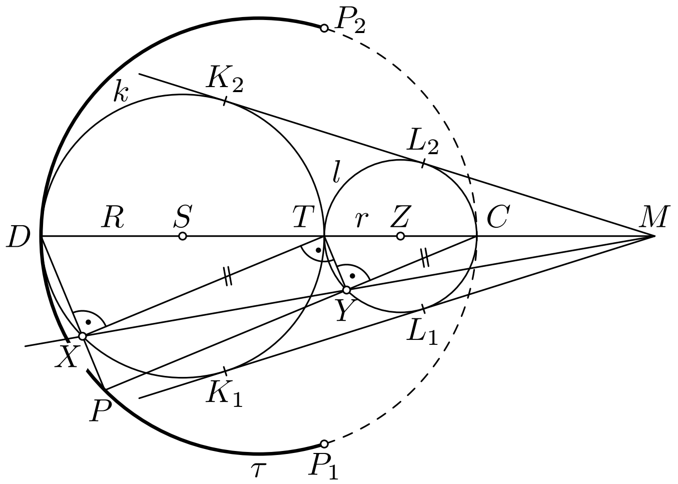
Mezi aritmetickým a kvadratickým průměrem nastane rovnost, právě když se všechny členy rovnají. Odtud $x = y = z = 2$.

Případ $a = 24$, $b = -8$ posoudíme podobně, i tehdy je řešení jediné.

Odpověď. Daná soustava má jediné řešení pro $a = 24$, $b = 8$ nebo $a = 24$, $b = -8$.

4. *Jsou dány kružnice k a l s různými poloměry, které se vně dotýkají v bodě T. Průsečíkem M jejich společných vnějších tečen veďme sečnu s obou kružnic. Označme X ten z obou průsečíků kružnice k se sečnou s, který je vzdálenější od bodu M. Podobně označme Y ten z obou průsečíků kružnice l se sečnou s, který je vzdálenější od bodu M. Nechť P je takový bod, že $XTYP$ je rovnoběžník. Určete množinu bodů P odpovídajících všem takovým sečnám s.*

Řešení. Označme S, Z středy obou kružnic k, l a R, r jejich poloměry (bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $r < R$). Označme dále C (D) od T různý průsečík kružnice l (k) s přímkou SZ a K_1, K_2, L_1, L_2 po řadě dotykové body obou společných vnějších tečen ke kružnicím k a l (obr. 2).



Obr. 2

Bod M je středem stejnolehlosti h obou kružnic s koeficientem R/r. Přitom je například $h(L_1) = K_1$, $h(Z) = S$, $h(C) = T$, $h(T) = D$, $h(Y) = X$. Odtud plyne, že přímky CY, TX jsou rovnoběžné ($h(CY) = TX$). Protože úhel CYT je pravý podle Thaletovy věty, je také $|\sphericalangle YTX| = 90°$ (TY je příčka rovnoběžek CY, TX). Rovnoběžník $XTYP$ je tedy vždy obdélník.

Zároveň je zřejmé, že body C, Y, P leží v přímce a podobně i body D, X, P leží v přímce. Je tudíž $|\sphericalangle CPD| = 90°$ a bod P leží na Thaletově kružnici τ nad průměrem CD. Leží na ní i vrcholy P_1, P_2 rovnoběžníků $K_1TL_1P_1$, $K_2TL_2P_2$, protože pro ně můžeme zopakovat předchozí úvahu (jako pro rovnoběžník $XTYP$).

Nyní už není problém ukázat, že hledanou množinou bodů je větší z oblouků P_1P_2 kružnice τ vyjma body P_1, P_2 a D (neboť body Y tvoří větší z oblouků L_1L_2 kružnice l vyjma body T, L_1, L_2).

Poznámka. V tomto období většina studentů asi ještě nebude mít probrané učivo o stejnolehlosti kružnic. Tuto překážku pomohou odstranit návodné úlohy na vlastnosti stejnolehlosti kružnic.

Ještě naznačíme hlavní myšlenky jiných dvou přístupů:

a) Abychom odhadli tvar hledané množiny, zvolíme několik význačných poloh přímky XY. Vhodné jsou následující polohy: a) $X = K_1$, $Y = L_1$ (PT je kolmé na

SZ), b) XS a YZ jsou kolmé na SZ (tehdy vyjde, že pata kolmice z bodu P na SZ leží ve středu J úsečky CD a $|JC| = |JP|$).

Z toho už se dá odhadnout, že bod P leží nejspíš na kružnici se středem J a poloměrem $\frac{1}{2}(R+r)$. Zbývá už jen dokázat (tedy obecně vypočítat), že vzdálenost $|PJ|$ je rovna $\frac{1}{2}(r+R)$. (Není to lehké.)

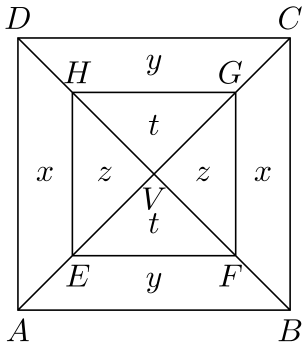
b) Pomocí shodných a podobných zobrazení je nejelegantnější následující postup: Pomocí souřadnic (bod M zvolíme za počátek souřadného systému) je $P = X + Y - T = Y + h(Y) - T = Y + \dfrac{R}{r}Y - T = \left(1 + \dfrac{R}{r}\right)Y - T$, bod P tedy vznikne z bodu Y (a všechny body Y tvoří větší z oblouků L_1L_2 kružnice l bez bodů T, L_1, L_2) složením stejnolehlosti se středem M a koeficientem $1 + \frac{R}{r}$ a posunutí o vektor $\boldsymbol{TM}$.

5. *Devítistěn $ABCDEFGHV$ vznikl slepením krychle $ABCDEFGH$ a pravidelného čtyřbokého jehlanu $EFGHV$. Na každou stěnu tohoto devítistěnu jsme napsali číslo. Čtyři z napsaných čísel jsou 25, 32, 50 a 57. Pro každý vrchol devítistěnu $ABCDEFGHV$ sečteme čísla na všech stěnách, které ho obsahují. Dostaneme tak devět stejných součtů. Určete zbývajících pět čísel napsaných na stěnách tohoto tělesa.*

Řešení. Protože dva sousední vrcholy leží vždy ve dvou společných stěnách, budeme si všímat především takovýchto dvojic vrcholů.

Vrcholy A a B (B a C) leží ve společných stěnách $ABFE$ a $ABCD$ ($BCGF$ a $BCDA$). Proto porovnáním jim přiřazených čísel dostaneme, že na stěnách $ADHE$ a $BCGF$ ($ABFE$ a $CGHD$) je stejné číslo. Označme ho x (y).

Podobně vrcholy E a F (F a G) leží ve společných stěnách $EFBA$ a EFV ($FGCB$ a FGV) a navíc už víme, že stěny $ADHE$ a $FBCG$ ($ABFE$ a $GHDC$) mají stejná čísla. Proto porovnáním jim přiřazených čísel dostaneme, že na stěnách HEV a FGV (EFV a GHV) je stejné číslo. Označme ho z (t, obr. 3).



Obr. 3

Porovnáním čísel příslušných vrcholům A a E (mají společné stěny $EABF$ a $EADH$) dále dostaneme, že stěna $ABCD$ má číslo $s = z + t$.

Nakonec porovnejme vrcholy E a V (mají společné stěny EFV a HEV). Dostaneme $z + t = x + y$.

Když to vše shrneme, zjistíme, že jednotlivé stěny jsou nutně očíslovány čísly x (stěny $BCGF$ a $DAEH$), z (stěny FGV a EHV), s (stěna $ABCD$), $s - x$ (stěny

$ABFE$ a $CDHG$), $s - z$ (stěny EFV a GHV). A snadno se přesvědčíme, že takovéto očíslování má vždy požadovanou vlastnost (všem vrcholům je přiřazeno číslo $2s$).

My známe čtyři různá čísla z devíti čísel x, x, z, z, s, $s - x$, $s - x$, $s - z$, $s - z$, tedy čtyři čísla z pěti čísel x, z, s, $s - x$, $s - z$.

a) Pokud je neznámé páté číslo s, tvoří známá čísla dvě dvojice se stejným součtem: $x+(s-x) = z+(s-z)$. Pro daná čísla tak máme jedinou možnost $25+57 = 32+50 = 82$. Hledaná čísla jsou pak 25, 32, 50, 57 a 82.

b) Není-li páté neznámé číslo s, je jedno známé číslo (a to s) součtem dalších dvou známých: $s = x + (s - x)$, nebo $s = z + (s - z)$. Pro daná čísla je jediná možnost: $25 + 32 = 57$. Potom je $s = 57$ a hledanou pětici tvoří čísla 7, 7, 25, 32 a 50.

Odpověď. Hledaná čísla jsou buď 25, 32, 50, 57 a 82, nebo čísla 7, 7, 25, 32 a 50.

Ještě naznačíme, jak by mohl vypadat čistě algebraický přístup — řešením devíti rovnic o deseti neznámých.

Kvůli přehlednosti si musíme dát záležet na označení jednotlivých čísel napsaných na stěnách. Označme čísla na stěnách $ABFE$, $BCGF$, $CDHG$, $DAEH$, EFV, FGV, GHV, HEV a $ABCD$ postupně a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4, c a nechť společný součet na stěnách při každém vrcholu je s. Dostaneme tak následujících devět rovnic:

$$a_1 + a_2 + b_1 + b_2 = s, \tag{F}$$
$$a_2 + a_3 + b_2 + b_3 = s, \tag{G}$$
$$a_3 + a_4 + b_3 + b_4 = s, \tag{H}$$
$$a_4 + a_1 + b_4 + b_1 = s, \tag{E}$$
$$a_1 + a_2 + c = s, \tag{B}$$
$$a_2 + a_3 + c = s, \tag{C}$$
$$a_3 + a_4 + c = s, \tag{D}$$
$$a_4 + a_1 + c = s, \tag{A}$$
$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = s. \tag{V}$$

Porovnáním rovnic (B) a (C) máme $a_1 = a_3$. Porovnáním rovnic (D) a (C) máme $a_2 = a_4$.

Pomocí těchto vztahů dále dostaneme: porovnáním rovnic (F) a (G) vyjde $b_1 = b_3$; porovnáním rovnic (G) a (H) vyjde $b_2 = b_4$.

To znamená, že nám pro čísla a_1, a_2, b_1, b_2 a c zůstaly rovnice

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + b_1 + b_2 &= s, \\ a_1 + a_2 + c &= s, \\ b_1 + b_2 &= \tfrac{1}{2}s. \end{aligned}$$

Odtud už snadno dostaneme, že $c = a_1 + a_2 = b_1 + b_2 = \frac{1}{2}s$.

6. *Je dán rovnostranný trojúhelník XYZ s těžištěm T a stranou délky 5 cm. Sestrojte rovnoběžník $ABCD$ s obsahem 8 cm^2 a stranou AB délky 2 cm tak, aby body X, Y, Z, T ležely po řadě na přímkách AB, BC, CD, DA.*

Podstatou řešení jsou následující dvě úlohy, jež mohou sloužit i jako úlohy návodné.

A. Jsou dány body K, L. Veďte jimi po řadě rovnoběžky k, l, je-li dána jejich vzdálenost d.

B. Jsou dány body K, L a přímka m. Veďte body K, L po řadě rovnoběžky k, l, které na přímce m vytínají úsečku dané délky d.

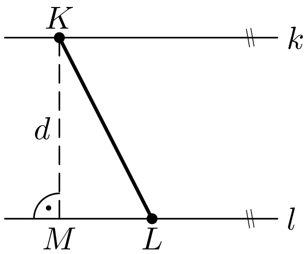
Řešení úlohy A (obr. 4). Nechť M je pata kolmice vedené z bodu K na přímku l. V trojúhelníku KLM s pravým úhlem při vrcholu M známe vrcholy K, L a délku odvěsny $|KM| = d$, vrchol M tedy umíme sestrojit (jako průsečík Thaletovy kružnice t nad průměrem KL s kružnicí $\kappa(K, d)$). Potom ML je přímka l.

Pokud bychom požadovali diskusi, víme, že počet řešení závisí na existenci průsečíku kružnic t a κ:

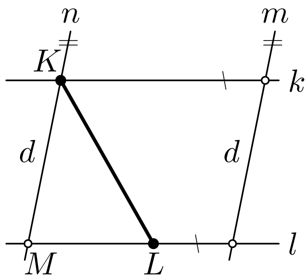
Pokud $|KL| < d$, nemá úloha řešení.

Pokud $|KL| = d$, má úloha jedno řešení (kolmice na KL).

Pokud $|KL| > d$, mají kružnice k a t dva průsečíky, takže úloha má dvě řešení.



Obr. 4



Obr. 5

Řešení úlohy B (obr. 5). Veďme bodem K rovnoběžku n s přímkou m a označme M její průsečík s přímkou l. Potom $|KM| = d$, takže konstrukce bodu M je zřejmá. Přímka l je pak určena body L a M.

Pokud bychom požadovali diskusi, snadno zjistíme, že na přímce n existují dva body M požadovaných vlastností, a počet řešení závisí na tom, zda $M = L$.

Pokud současně neplatí, že KL je rovnoběžná s m a $|KL| = d$, má úloha dvě řešení.

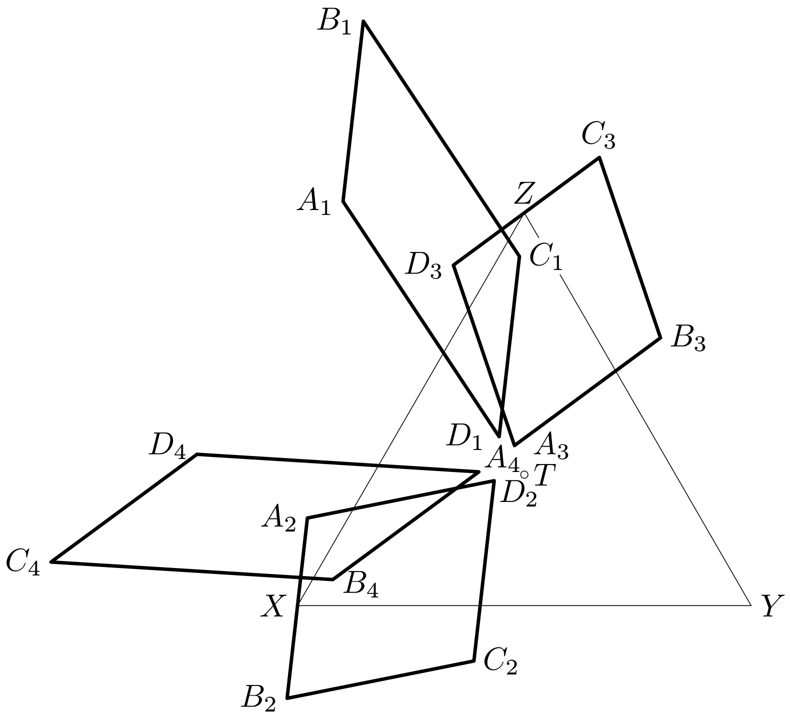
Pokud je KL rovnoběžná s m a $|KL| = d$, vznikne pro jednu z možných poloh bodu M v předcházejícím případě nekonečně mnoho řešení (za přímku l můžeme vzít libovolnou přímku procházející bodem L).

Řešení původní úlohy. Z obsahu rovnoběžníku $ABCD$ a délky strany AB snadno vypočítáme výšku v na stranu AB: je $v = 8\,\mathrm{cm}^2 : 2\,\mathrm{cm} = 4\,\mathrm{cm}$. Odtud plyne, že vzdálenost rovnoběžek AB a CD je 4 cm, přičemž známe bod X přímky AB a bod Z přímky CD. Podle úlohy A tedy umíme sestrojit přímky AB a CD.

V poloze, která je dána, má tato část dvě řešení.

Když už máme přímku AB, jsou AD a BC dvě neznámé rovnoběžky, které procházejí danými body T a Y a na (známé) přímce AB vytínají úsečku dané délky $|AB| = 2\,\mathrm{cm}$. Proto můžeme rovnoběžky AD a BC sestrojit na základě úlohy B.

Je zřejmé, že speciální poloha daných bodů X, Y, Z a T nemá na postup řešení vliv, zaručuje nám však snadnou diskusi počtu řešení. Pro obě polohy přímky AB má úloha v dané situaci dvě řešení. Tím je rovnoběžník $ABCD$ sestrojen. (Přímkami AB, BC, CD a AD jsou vrcholy A, B, C, D určeny.) Úloha má 4 řešení (obr. 6).



Obr. 6