49. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Úlohy domácího kola kategorie C

1. *Při dělení jistého přirozeného čísla čísly 19 a 99 vyjdou jako zbytky dvě prvočísla. Součet obou neúplných podílů se rovná 1 999. Určete dělené číslo.*

ŘEŠENÍ. Obě dělení hledaného čísla N vyjádříme rovnostmi

$$N = 19a + p \quad \text{a} \quad N = 99b + q,$$

kde a, b jsou příslušné neúplné podíly a p, q příslušné zbytky. Podle zadání jsou čísla p, q prvočísla, přičemž jako zbytky splňují nerovnosti $p < 19$ a $q < 99$. Nezáporná celá čísla a, b jsou dle zadání zase taková, že jejich součet se rovná číslu 1 999. Proto platí $b = 1\,999 - a$ a z dvojího vyjádření čísla N,

$$N = 19a + p = 99 \cdot (1\,999 - a) + q,$$

odvodíme rovnost $118a + (p - q) = 197\,901$. Protože rozdíl zbytků $p - q$ je „malé“ číslo, přesněji $-99 < p - q < 19$, je podle poslední rovnosti číslo $118a$ takový násobek čísla 118, jenž leží mezi čísly $197\,901 - 19$ a $197\,901 + 99$. Dělením $197\,901 : 118$ zjistíme, že $197\,901 = 1\,677 \cdot 118 + 15$. Proto nutně platí $a = 1\,677$ (takže $b = 322$) a $p - q = 15$. Z poslední rovnosti plyne, že jedno z prvočísel p, q je liché a druhé sudé, tedy $q = 2$ a $p = 17$. Zbývá vypočítat hodnotu N:

$$N = 19 \cdot 1\,677 + 17 = 99 \cdot 322 + 2 = 31\,880.$$

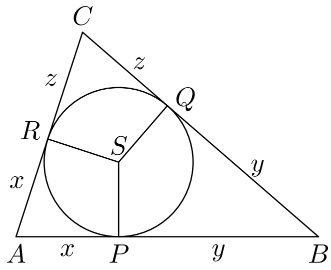
Poznámka. Někteří řešitelé budou postupovat tak, že nejprve odhadnou velikost hledaného čísla N, například řešením „přibližné“ rovnice $\frac{N}{19} + \frac{N}{99} = 1\,999$, která má kořen $N \doteq 31\,865$. Pak pomocí nejbližších násobků čísel 19 a 99 ($19 \cdot 1\,677 = 31\,863$, $99 \cdot 322 = 31\,878$, $19 \cdot 1\,678 = 31\,882$) určí jediné možné hodnoty neúplných podílů a, b (stačí diskutovat případy $N < 31\,878$, $31\,878 \leqq N < 31\,882$ a $N \geqq 31\,882$).

Odpověď: Hledané číslo je rovno 31 880.

2. *Najděte všechny pravoúhlé trojúhelníky, ve kterých spojnice středů vepsané a opsané kružnice svírá s přeponou úhel* 45 *stupňů.*

Řešení samotné úlohy by bylo možné vyložit na několika řádcích, kdybychom z následujícího textu „vypreparovali“ nezbytně potřebné poznatky a úvahy (viz poslední odstavec). Záměrně však uvedeme obšírnější výklad (rozčleněný do tří částí), abychom řešitele upozornili na obecnější tvrzení, která lze uplatnit i při řešení jiných úloh.

Část A. Předpokládejme, že kružnice vepsaná *obecnému* trojúhelníku ABC se dotýká stran AB, BC, AC po řadě v bodech P, Q a R (obr. 2.1). Z hodin geometrie žáci ví o souměrnosti obou tečen vedených z daného bodu k dané



Obr. 2.1

kružnici. Úsečky AP a AR jsou tudíž shodné, stejně jako úsečky BP a BQ a úsečky CQ a CR. Ukážeme, jak lze délky

$$x = |AP| = |AR|,\ y = |BP| = |BQ|,\ z = |CQ| = |CR|$$

vyjádřit pomocí délek stran $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$. Podle obr. 2.1 platí

$$x + y = c,\ y + z = a,\ x + z = b,$$

což je soustava tří lineárních rovnic, z níž snadno plynou užitečné vzorce

$$x = \frac{b+c-a}{2},\ y = \frac{a+c-b}{2},\ z = \frac{a+b-c}{2}.$$

Část B. Nyní předpokládejme, že ABC je *pravoúhlý* trojúhelník s přeponou AB. Označme S střed kružnice vepsané a Q, R její body dotyku s odvěsnami BC, AC (obr. 2.2). Protože $SQCR$ je pravoúhelník, jehož sousední strany SQ a SR jsou shodné (mají délku rovnou poloměru ϱ kružnice vepsané), jedná se o čtverec o straně ϱ. Délku úseku $z = |CQ|$ jsme však vypočetli v Části A. Tak pro poloměr ϱ kružnice vepsané pravoúhlému trojúhelníku s odvěsnami a, b a přeponou c dostáváme vzorec

$$\varrho = \frac{a+b-c}{2}.$$

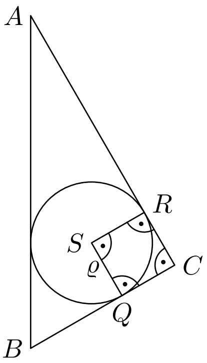
Část C. Předpokládejme konečně, že ABC je pravoúhlý trojúhelník s přeponou AB, který splňuje podmínku z textu úlohy. Podle Thaletovy věty je střed O kružnice opsané trojúhelníku ABC středem přepony AB. Podle zadání má jeden z úhlů SOA, SOB (kde S je střed vepsané kružnice) velikost $45°$; nechť je to úhel SOB (obr. 2.3), jinak přehodíme označení vrcholů A, B. Bod P, v němž se kružnice vepsaná dotýká strany AB, je pak vnitřním bodem úsečky OB. Podle Části A platí vzorec $|BP| = \frac{1}{2}(a + c - b)$, takže

$$|OP| = |OB| - |BP| = \frac{c}{2} - \frac{a + c - b}{2} = \frac{b - a}{2}.$$

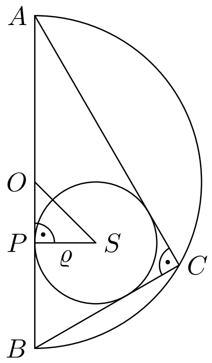
Vyjádřili jsme délku odvěsny OP pravoúhlého trojúhelníku SOP. Jeho druhá odvěsna SP má podle Části B délku $|SP| = \varrho = \frac{1}{2}(a+b-c)$. Protože však úhel SOP má dle předpokladu velikost $45°$, je trojúhelník SOP rovnoramenný:

$$|OP| = |SP|, \text{ neboli } \frac{b - a}{2} = \frac{a + b - c}{2}, \text{ neboli } 2a = c.$$

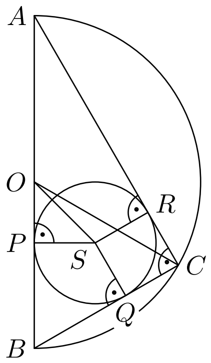
Strany pravoúhlého trojúhelníku ABC jsou proto v poměru $a : b : c = 1 : \sqrt{3} : 2$, takže jeho vnitřní úhly jsou, jak je dobře známo, $30°$, $60°$ a $90°$. Pro úplnost je třeba ještě ukázat, že takový trojúhelník skutečně požadovanou vlastnost má. To lze provést obrácením předchozího postupu: z rovnosti $2a = c$ se odvodí rovnost $|OP| = |SP|$, která znamená, že pravoúhlý trojúhelník SOP je rovnoramenný, takže úhel SOP má skutečně velikost $45°$.



Obr. 2.2



Obr. 2.3



Obr. 2.4

Stručné řešení podle obr. 2.4: Úsečka SO svírá s přeponou AB úhel $45°$, právě když $|OP| = |SP|$. Protože však $|SP| = |SR| = |QC|$ a $|PB| = |QB|$, je rovnost $|OP| = |SP|$ ekvivalentní s rovností $|OP| + |PB| = |QC| + |QB|$, tedy s rovností $|OB| = |BC|$. Podle Thaletovy věty však vždy platí $|OB| = |OC|$, takže rovnost $|OB| = |BC|$ nastane, právě když je trojúhelník OBC rovnostranný, tedy právě když úhel ABC měří $60°$.

Odpověď: Požadovanou vlastnost mají právě ty pravoúhlé trojúhelníky, jejichž ostré vnitřní úhly mají velikost $30°$ a $60°$.

Poznámka: Úloha 2 je velmi podobná starší úloze MO (21–C–II–1b): Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC, bod D je střed jeho přepony AB a bod S je středem jemu vepsané kružnice. Dokažte: Jestliže $|CS| = |DS|$, pak jeden vnitřní úhel trojúhelníku ABC má velikost $30°$.

3. *Zjistěte nejmenší přirozená čísla k, pro něž platí jednotlivá tvrzení a), b) a c): Obsadíme-li figurkami libovolných k polí šachovnice 8×8, pak budou obsazena některá*

a) tři sousední pole některého řádku,

b) tři sousední pole některé šikmé řady,

c) čtyři sousední pole některého řádku nebo sloupce.

Šikmou řadou rozumíme takovou skupinu polí, jejichž úhlopříčky jednoho z obou směrů leží na jedné a téže přímce.

Formulace úlohy bude patrně pro řešitele MO kategorie C neobvyklá, diskutujme s nimi proto o její logické stavbě i obsahu, například o části c) takto: Lze se domnívat, že pokud na šachovnici jakkoliv obsadíme „velký“ počet polí, budou mezi nimi čtyři sousední pole některého řádku nebo sloupce. Naším úkolem je zjistit nejmenší hodnotu toho „velkého“ počtu, při kterém to je ještě pravda. Přesněji vyjádřeno, hledáme číslo k, které má tyto dvě vlastnosti:

(1) Obsadíme-li na šachovnici libovolných k polí, budou mezi nimi čtyři sousední pole některého řádku nebo sloupce.

(2) Na šachovnici lze obsadit $k - 1$ polí tak, aby mezi nimi nebyla žádná čtyři sousední pole žádného řádku ani žádného sloupce.

Někteří žáci se ve svých řešeních „spokojí“ s tím, že pouze popíší vhodné obsazení $k - 1$ polí s vlastností z (2), a to (díky dobré intuici) skutečně pro největší možné k. Jiní k tomuto popisu připojí zdůvodnění, že jakmile k dotyčným $k - 1$ polím přidají jakékoliv další pole, budou již mezi nimi čtyři sousední pole některého řádku nebo sloupce. Ani to není úplné řešení! Vlastnost z (1) je totiž nutné zdůvodnit pro *každou* k-tici obsazených polí, nejen pro ty k-tice, které vzniknou přidáním jednoho pole k speciální (řešitelem popsané) skupině $k - 1$ polí. (Strategii „přidávání dalšího pole“ bychom mohli v řešení úlohy využít, kdybychom uměli popsat *všechna* „maximální“ obsazení polí zmíněná v (2). Tento popis do textu našeho řešení každé z části a)–c) pro zajímavost připojujeme.)

Před řešením vlastní soutěžní úlohy proberme s žáky jednu návodnou úlohu.

Návodná úloha. V jedné řadě stojí za sebou 11 písmen, každé z nich je A nebo B. Nikde za sebou nestojí ani 3 písmena A, ani 4 písmena B. Kolik nejméně a kolik nejvíce písmen A v takové řadě může být?

ŘEŠENÍ. Danou řadu 11 písmen rozdělíme nejprve zleva doprava na skupiny po 4, 4 a 3 písmenech. Protože nikde za sebou nestojí 4 písmena B, je v první skupině 4 písmen obsaženo aspoň jedno A, totéž platí i o druhé skupině 4 písmen. Tak jsme dokázali, že v celé řadě 11 písmen jsou aspoň dvě A. Mohou to být právě dvě A, jak ukazuje příklad řady BBBABBBABBB. Podruhé rozdělíme celou řadu zleva doprava na skupiny po 3, 3, 3 a 2 písmenech. Protože nikde za sebou nestojí 3 písmena A, je v každé skupině 3 sousedních písmen aspoň jedno B. Protože jsme vyčlenili 3 takové (disjunktní) skupiny, jsou v celé řadě aspoň tři písmena B. Jinak řečeno, v celé řadě 11 písmen je nejvýše osm písmen A. Může to být právě osm A, jak ukazuje příklad řady AABAABAABAA. Tím je řešení návodné úlohy hotovo. Kdybychom řešili obecnější úlohu o řadě N písmen A a B, ve které nikde za sebou nestojí ani a písmen A, ani b písmen B, o odpovědi na stejnou otázku by rozhodovala dělení $N : a$ a $N : b$ (se zbytky); vysvětlete sami jak.

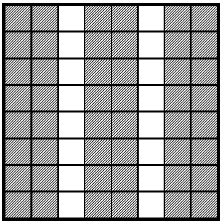
Řešení části a) soutěžní úlohy: Všimněme si, že v každém řádku je možné obsadit nejvýše šest polí tak, aby mezi obsazenými nebyla žádná tři sousední pole (stačí rozdělit všech osm polí řádku na skupiny 3, 3 a 2 sousedních polí a zopakovat úvahu z řešení návodné úlohy). Proto lze na celé šachovnici obsadit nejvýše $8 \times 6 = 48$ polí tak, aby v žádném řádku nebyla obsazena tři sousední pole. Jinak řečeno, obsadíme-li *libovolných* 49 polí, pak obsazena budou některá tři sousední pole některého řádku. Tento jev nenastane pro (jediné) obsazení 48 polí, které vidíte na obr. 3.1, kde jsou obsazená pole vyznačena šrafováním (zmíněná jedinečnost plyne z toho, že je jediné možné obsazení šesti polí v každém řádku). Proto je hledané číslo k rovno 49.

Řešení části b): Zkusme postupovat obdobně jako při řešení části a). Vyberme tedy jeden z obou směrů šikmých řad, například směr „zleva zdola napravo nahoru“ a posuzujme, kolik polí lze obsadit v jednotlivých šikmých řadách vybraného směru tak, aby v žádné z nich nebyla obsazena žádná tři sousední pole. Počty všech polí v těchto 15 řadách jsou (shora dolů) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 a 1; proto v nich lze požadovaným způsobem (při požadované podmínce) obsadit po řadě nejvýše 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 2 a 1 pole (znovu uplatníme úvahu o disjunktních trojicích sousedních polí jako v návodné úloze). Proto lze na celé šachovnici obsadit nejvýše

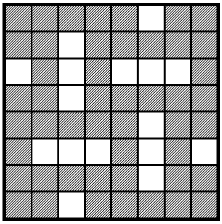
$$1 + 2 + 2 + 3 + 4 + 4 + 5 + 6 + 5 + 4 + 4 + 3 + 2 + 2 + 1 = 48$$

polí tak, aby nebyla obsazena žádná tři sousední pole žádné šikmé řady vybraného směru. Obsadíme-li s touto podmínkou v každé z uvažovaných 15 šikmých řad největší možný počet polí vhodným způsobem (v řadách o 1, 2, 5 a 8 polích je toto „maximální“ obsazení jediné, v řadách o 3, 4, 6 a 7 polích nikoliv, zvolme i v nich obsazení z pohledu zleva doprava typu XXOXXO...), dostaneme na celé šachovnici opět obsazení 48 polí z obrázku 3.1. Co je důležité: při tomto obsazení také v šikmých řadách druhého směru nejsou nikde obsazena tři sousední pole! Shrňme, co jsme zjistili:

1. Obsadíme-li na šachovnici libovolných 49 polí, budou mezi nimi tři sousední pole některé šikmé řady zvoleného směru.
2. Na šachovnici lze obsadit 48 polí tak, aby mezi nimi nebyla žádná tři sousední pole žádné šikmé řady (jednoho i druhého směru).



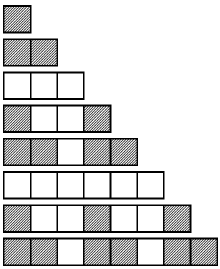
Obr. 3.1



Obr. 3.2

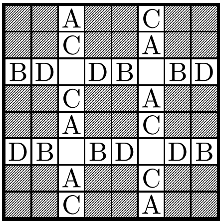
To znamená, že pro část b) úlohy je hledané číslo k rovno 49. Dodejme, že existují právě čtyři různá obsazení 48 polí zmíněná v (2). Kromě úplného obsazení šesti sloupců z obrázku 3.1 a obsazení, které je jeho otočením o 90° (je tedy úplným obsazením šesti řad), je to zajímavé obsazení z obrázku 3.2 a jeho „zrcadlové překlopení“.

Důkaz: Jak víme, při každém obsazení 48 polí zmíněném v (2) musí být v každé šikmé řadě šachovnice obsazen největší možný počet polí (výčet těchto maximálních počtů jsme uvedli výše); na obr. 3.3 jsou znázorněny řady polí

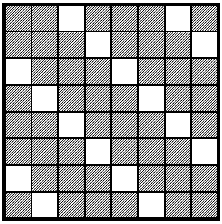


Obr. 3.3

délek 1 až 8, šrafováním jsou v nich vyznačena právě ta pole, která jsou *nutně obsazena*, je-li v celé řadě jakkoliv obsazen příslušný maximální počet polí (připomínáme podmínku: obsazena nejsou žádná tři sousední pole); znovu zopakujme, že všechna obsazená pole jsou vyznačena pouze v řadách o 1, 2, 5 a 8 polích. Odtud plyne, že při libovolném obsazení 48 polí zmíněném v (2) je nutně obsazeno 36 polí vyznačených na obr. 3.4; dále už je snadné ukázat, že zbývajících 12 obsazených polí je tvořeno dvěma šesticemi polí značených na obr. 3.4 jednou z dvojic písmen: A a C, B a C, A a D nebo B a D (obrázek 3.1 odpovídá dvojici písmen B a D, obrázek 3.2 dvojici A a D).

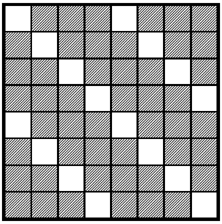


Obr. 3.4

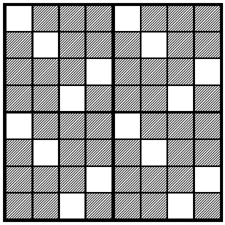


Obr. 3.5

Řešení části c): Jako v části b) se zajímáme o skupiny polí dvou směrů, v tomto případě o řádky a sloupce. Posuzujme například nejdříve, kolik polí lze obsadit v jednotlivých řádcích tak, aby v žádném z nich nebyla obsazena čtyři sousední pole. Jak zjistíme pomocí rozdělení řádku na dvě čtveřice sousedních polí, obsazených polí bude v každém řádku nejvýše šest. Proto lze na celé šachovnici obsadit nejvýše $8 \times 6 = 48$ polí tak, aby v žádném řádku nebyla obsazena čtyři sousední pole. Jinak řečeno: obsadíme-li libovolných 49 polí, pak obsazena budou čtyři sousední pole některého řádku. (Je zajímavé srovnat tento závěr s obdobným závěrem z řešení části a), kde jsme se zajímali nikoliv o čtveřice, nýbrž o trojice sousedních polí.) Nyní samozřejmě vzniká otázka, zda je možné na šachovnici obsadit 48 polí tak, aby nebyla obsazena čtyři sousední pole nejen v žádném řádku, ale ani v žádném sloupci. Taková obsazení existují, dva příklady vidíte na obr. 3.5 a 3.6. Proto i v části c) je hledané číslo k rovno 49. Bez důkazu dodejme ještě popis všech obsazení 48 polí šachovnice, kdy mezi obsazenými poli nejsou čtyři sousední pole žádného řádku ani sloupce: Celou šachovnici rozdělíme na čtyři čtvrtiny 4×4, v jedné z nich, například levé horní části, obsadíme z 16 polí právě 12 tak, aby v ní zůstalo neobsazeno právě jedno pole v každém ze čtyř řádků i v každém ze čtyř sloupců (to je možné udělat $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ způsoby, jeden z nich, odlišný od způsobů z obr. 3.5 a 3.6, je na obr. 3.7), a toto obsazení shodně přeneseme vodorovnými a svislými posunutími o čtyři pole do ostatních tří čtvrtin celé šachovnice.



Obr. 3.6



Obr. 3.7

Odpověď: Hledané číslo k je pro každou z částí a)–c) rovno témuž číslu 49 (pořadovému číslu letošního ročníku MO).

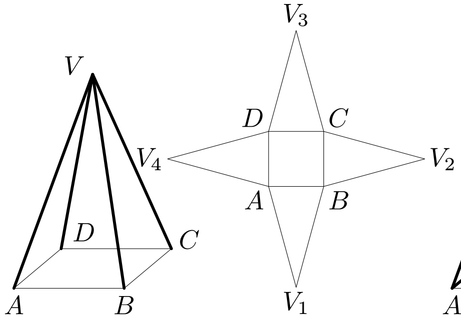
4. *Jirka zhotovil papírový model pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ s podstavou $ABCD$. Když pak model podél čtyř hran rozřízl, bylo ho možno rozvinout (bez překrytí) do roviny. Kolik různých sítí daného jehlanu tak mohl Jirka dostat? Ukázalo se, že síť, kterou Jirka dostal, měla tvar (nekonvexního) sedmiúhelníku. Vypočtěte úhel AVB v boční stěně jehlanu.*

Řešení. Počet různých sítí daného jehlanu určíme tak, že nejprve všechny možné sítě nakreslíme. Abychom některou možnost neopomenuli, měli bychom do výčtu sítí vnést *určitý systém.* Popíšeme dva přístupy, které takový systém vytvářejí (a které budou patrně žákům nejbližší).

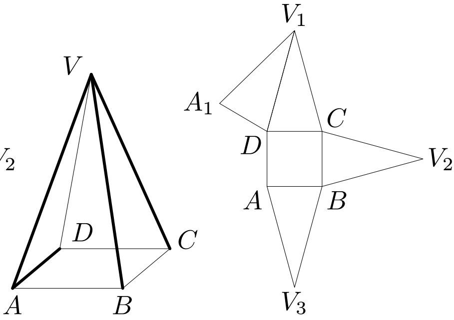
Přístup 1 („od sítě k jehlanu“). Každá síť bude složena z jednoho čtverce o straně a a čtyř rovnoramenných trojúhelníků o stranách a, b, b, kde a značí délku podstavné hrany a b délku boční hrany daného jehlanu $ABCDV$. Přemýšlejme tedy o tom, jak takový čtverec a čtyři trojúhelníky „slepit“ podél shodných stran do „celku“ a zda tento celek skutečně vytvoří síť jehlanu. Je velmi přirozené rozčlenit řešení tohoto úkolu *podle počtu stran čtverce, které budou slepeny* (možné počty jsou 1 až 4).

Přístup 2 („od jehlanu k síti“). Přemýšlejme o tom, jak rozříznout daný jehlan $ABCDV$ podél čtyř hran, abychom po rozvinutí dostali jeho síť. (Brzy si při tom uvědomíme jeden obecný poznatek: z každého vrcholu tělesa musí vycházet aspoň jedna hrana řezu.) Protože nám jde o počet různých (tj. po dvou neshodných) sítí, s ohledem na symetrii daného jehlanu není příliš vhodné systematizovat čtveřice hran řezu podle toho, zda obsahují některé konkrétní hrany (jako např. hrany AB, AV apod.). Výhodnější je rozdělení těchto čtveřic do skupin podle toho, *kolik hran řezu je v jehlanu podstavných* (a kolik bočních).

Protože oba popsané přístupy vedou ke shodné systematizaci (je-li právě k hran řezu podstavných, je v příslušné síti právě $4 - k$ stran čtverce slepeno s trojúhelníky), popíšeme výčet všech sítí jen podle Přístupu 2:

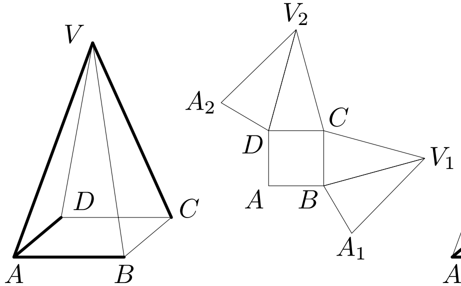


Obr. 4.1

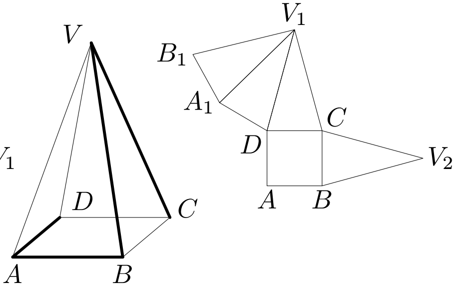


Obr. 4.2

1. Neleží-li v podstavě $ABCD$ žádná hrana řezu, je jehlan rozříznut podél všech čtyř bočních hran, příslušná síť je na obr. 4.1.
2. Předpokládejme, že v podstavě $ABCD$ leží jediná hrana řezu, například hrana AD. Z vrcholů B a C musí vycházet nějaké hrany řezu, mohou to tedy být jedině hrany BV a CV. Tři hrany řezu jsou tedy AD, BV a CV, s ohledem na symetrii je lhostejno, zda je čtvrtou hranu řezu AV nebo DV, nechť je to tedy hrana AV jako na obr. 4.2.
3. Předpokládejme, že v podstavě $ABCD$ leží právě dvě hrany řezu. Rozlišme, zda jsou to hrany sousední (např. AB a AD), nebo hrany protější (např. AD a BC); pro větší přehlednost oba případy posuďme v oddělených odstavcích:
   - (3a) Je-li podstava rozříznuta právě podél hran AB a AD (takže řezem v podstavě je lomená čára BAD), musí být třetí hranou řezu hrana CV, čtvrtá hrana řezu je pak jedna z hran AV, BV, nebo DV. S ohledem na symetrii případů, kdy je čtvrtou hranou řezu BV nebo DV, uvádíme jen obrázky pro hrany řezu AV (obr. 4.3) a BV (obr. 4.4).

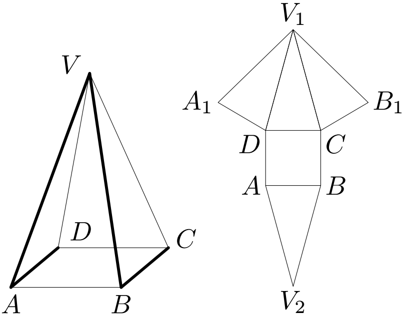


Obr. 4.3

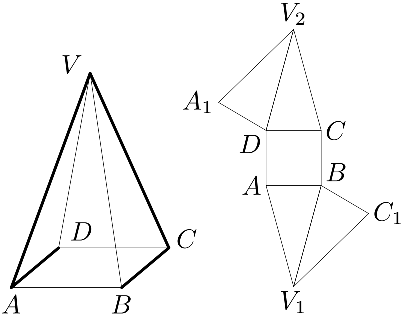


Obr. 4.4

(3b) Je-li podstava rozříznuta právě podél hran AD a BC, je třetí hranou řezu jedna z bočních hran AV, DV a čtvrtou hranou řezu jedna z bočních hran BV, CV (nemohou to totiž být ani obě hrany AV, DV, ani obě hrany BV, CV). S ohledem na symetrii stačí rozlišit jen dva případy: boční hrany řezu jsou buď AV a BV (obr. 4.5), nebo AV a CV (obr. 4.6).

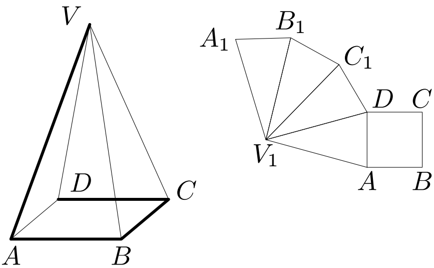


Obr. 4.5

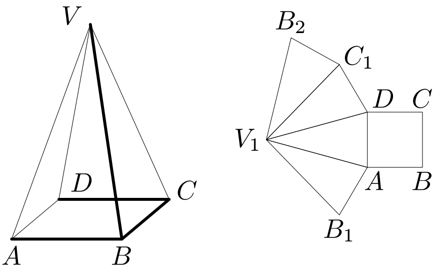


Obr. 4.6

4. Předpokládejme, že v podstavě $ABCD$ leží právě tři hrany řezu, například hrany AB, BC a CD, takže řezem v podstavě je lomená čára $ABCD$. S ohledem na symetrii nyní stačí rozlišit jen dva případy: čtvrtá hrana řezu vede do vrcholu V buďto z jednoho z obou krajních vrcholů zmíněné lomené čáry $ABCD$, například bodu A (obr. 4.7), nebo z jednoho z obou prostředních vrcholů, například bodu B (obr. 4.8).



Obr. 4.7



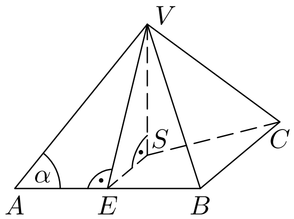
Obr. 4.8

Zjistili jsme, že daný jehlan má právě osm různých sítí. (Většina žáků asi správně všech osm sítí do svých řešení nakreslí, aniž pocítí nutnost vysvětlovat, proč jiné sítě neexistují. Diskutujme s nimi o této otázce.)

Přejděme nyní k druhé části úlohy, otázce, kdy některá ze sítí daného jehlanu má tvar nekonvexního sedmiúhelníku. Podle obrázků vidíme, že každá síť má, obecně vzato, osm vrcholů; jejich počet se sníží na sedm, právě když se úhel u jednoho z osmi obecných vrcholů „napřímí“, tj. bude mít velikost 180°. Velikosti všech dotyčných úhlů lze snadno vyjádřit pomocí $\omega = |\sphericalangle AVB|$ a $\alpha = |\sphericalangle BAV|$; zjistíme tak, popsaná situace nastane, jen když jeden z úhlů

$$2\alpha,\ \alpha + 90^\circ,\ 2\alpha + 90^\circ,\ 2\omega,\ 3\omega \text{ nebo } 4\omega \tag{$*$}$$

bude 180°. Položme si nyní poněkud obecnější otázku: Jaké hodnoty α a ω jsou přípustné, tj. odpovídají nějakému jehlanu $ABCDV$? Označme S střed čtverce $ABCD$ a E střed hrany AB (obr. 4.9), z pravoúhlého trojúhelníku EVS plyne,



Obr. 4.9

že $|EV| > |ES|$ neboli $|EV| > |AE|$, proto pro úhel α v pravoúhlém trojúhelníku AVE platí $45^\circ < \alpha < 90^\circ$ (pro $\alpha = 45^\circ$ bychom dostali „zdegenerovaný“ jehlan s nulovou výškou, pro $\alpha = 90^\circ$ „jehlan“ s nekonečnou výškou, tedy hranol). Zároveň je jasné, že pro každé $\alpha \in (45^\circ, 90^\circ)$ odpovídající jehlan existuje. Odtud vzhledem k rovnosti $2\alpha + \omega = 180^\circ$ plyne, že přípustné hodnoty ω zaplní interval $(0^\circ, 90^\circ)$. Proto z úhlů $(*)$ mohou být přímé jedině úhly 3ω a 4ω. Pro $\omega = 60^\circ$ mají tvar sedmiúhelníku sítě z obr. 4.4 a 4.5, pro $\omega = 45^\circ$ sítě z obr. 4.7 a 4.8.

Odpověď: Jirka mohl dostat právě osm různých sítí. Úhel AVB měl velikost 45° nebo 60°.

5. *V číselném výrazu*

$$+\,1 + 2 + 3 - 4 - 5 - 6 + 7 + 8 + 9 - 10 - 11 - 12 + \ldots +$$
$$+\,595 + 596 + 597 - 598 - 599 - 600),$$

ve kterém chybí levá závorka, jsou postupně vypsána všechna přirozená čísla od 1 *do* 600*; před nimi se pravidelně opakují tři znaménka* + *a tři znaménka* −*. Doplňte levou závorku do výrazu tak, aby vyšel výsledek* 378.

Řešení rozdělíme do pěti etap.

Část A. Podle způsobu opakování znamének rozdělíme daný výraz (ještě bez obou závorek) na 100 úseků po šesti číslech

$$+1+2+3-4-5-6,\ +7+8+9-10-11-12,$$
$$+13+14+15-16-17-18,\ \dots,$$
$$+589+590+591-592-593-594,\ +595+596+597-598-599-600$$

(říkejme jim dále stručně „úseky"). Při výpočtu celého výrazu bude výhodné určovat „dílčí součty" právě po těchto úsecích: po doplnění chybějící levé závorky se totiž naruší „celistvost" jediného úseku (toho, do kterého závorku doplníme).

Uložte žákům úkol, aby vypsali čísla toho úseku, který obsahuje dané číslo x, například $x = 24$, $x = 100$, $x = 571$ apod. Žáci si tak uvědomí, jaký význam má při tom zbytek při dělení čísla x číslem 6, a tím se připraví na to, aby dokázali zapsat čísla v k-tém úseku ($k = 1, 2, 3, \dots, 100$) takto:

$$6k-5,\ 6k-4,\ 6k-3,\ 6k-2,\ 6k-1,\ 6k.$$

Část B. Určeme nyní hodnoty výrazů tvořených jednotlivými úseky. Po několika prvních výpočtech

$$1+2+3-4-5-6=-9, \quad 7+8+9-10-11-12=-9, \quad \dots$$

se řešitelé jistě dovtípí, že pro každý úsek vyjde -9. Někteří to vysvětlí úsudkem. Přesvědčeme je o výhodách (zejména přehlednosti) algebraického postupu, kdy například první číslo úseku označíme písmenem x:

$$x+(x+1)+(x+2)-(x+3)-(x+4)-(x+5)=(3x+3)-(3x+12)=-9.$$

(V tomto místě ještě není důležité, že číslo x je tvaru $6k-5$.)

Část C. Zjistíme nyní možné hodnoty V zkoumaného výrazu v případě, kdy chybějící levou závorku vepíšeme před číslo z některého konkrétního úseku, například toho, který obsahuje číslo 100:

$$V = 1+\dots+\underbrace{*97+*98+*99-*100-*101-*102}_{\text{někam sem doplníme závorku}}+103+\dots-600)$$

Hvězdičkami jsme označili možná místa pro doplňovanou závorku. Snadno určíme, že před číslem 97 je 16 úseků a že za číslem 102 je 83 úseků ($16+83=99$, nezapočítaný stý úsek je tvořen čísly od 97 do 102). Je zřejmé, že pokud umístíme závorku na místo před číslo 97, 98 nebo 99, tedy za znaménko plus, přispěje do výsledku V všech 100 úseků číslem -9, takže vyjde $V = 100 \cdot (-9) = -900$. Umístíme-li závorku na místo před číslo 100, 101 nebo 102, tedy za znaménko minus, přispěje 16 úseků (před číslem 97) do výsledku V číslem -9, zatímco 83 úseků (za číslem 102) přispěje číslem $-(-9) = 9$. Se závorkou před číslem 100 tak vyjde

$$V = 16 \cdot (-9) + 97 + 98 + 99 - 100 + 101 + 102 + 83 \cdot 9 = 1\,000,$$

se závorkou před číslem 101

$$V = 16 \cdot (-9) + 97 + 98 + 99 - 100 - 101 + 102 + 83 \cdot 9 = 798,$$

konečně se závorkou před číslem 102

$$V = 16 \cdot (-9) + 97 + 98 + 99 - 100 - 101 - 102 + 83 \cdot 9 = 594.$$

Část D. Konkrétní postup z Části C nyní zopakujeme v obecné situaci, kdy závorku doplníme do k-tého úseku, na místo některé z hvězdiček:

$$\begin{aligned} V = 1 + \ldots + *[6k-5] + *[6k-4] + *[6k-3] - \\ - *[6k-2] - *[6k-1] - *[6k] + \ldots - 600) \end{aligned}$$

(vyjádření čísel jsme zapsali do *hranatých* závorek kvůli odlišení od vepisované *kulaté* závorky). V Části C bylo k rovno číslu 17, nyní je to libovolné přirozené číslo od 1 do 100 včetně. Před číslem $6k-5$ je zřejmě $(k-1)$ úseků a za číslem $6k$ je $(100-k)$ úseků. Pokud umístíme závorku na místo před číslo $6k-5$, $6k-4$ nebo $6k-3$, tedy za znaménko plus, přispěje do výsledku V všech 100 úseků číslem -9, takže vyjde $V = 100 \cdot (-9) = -900$. Umístíme-li závorku na místo před číslo $6k-2$, $6k-1$ nebo $6k$, tedy za znaménko minus, přispěje prvních $(k-1)$ úseků číslem -9, zatímco posledních $(100-k)$ úseků přispěje číslem $-(-9) = 9$. Se závorkou před číslem $6k-2$ tak vyjde

$$\begin{aligned} V = (k-1) \cdot (-9) + [6k-5] + [6k-4] + [6k-3] - [6k-2] + [6k-1] + \\ + [6k] + (100-k) \cdot 9 = 898 + 6k, \end{aligned}$$

se závorkou před číslem $6k-1$

$$\begin{aligned} V = (k-1) \cdot (-9) + [6k-5] + [6k-4] + [6k-3] - [6k-2] - [6k-1] + \\ + [6k] + (100-k) \cdot 9 = 900 - 6k, \end{aligned}$$

konečně se závorkou před číslem $6k$

$$\begin{aligned} V = (k-1) \cdot (-9) + [6k-5] + [6k-4] + [6k-3] - \\ - [6k-2] - [6k-1] - [6k] + (100-k) \cdot 9 = 900 - 18k. \end{aligned}$$

Našli jsme všechny možné hodnoty V zkoumaného výrazu po doplnění levé závorky.

Část E. Zjistíme nyní všechny případy, kdy výsledek V má hodnotu 378 ze zadání úlohy. Podle Části D stačí řešit rovnice

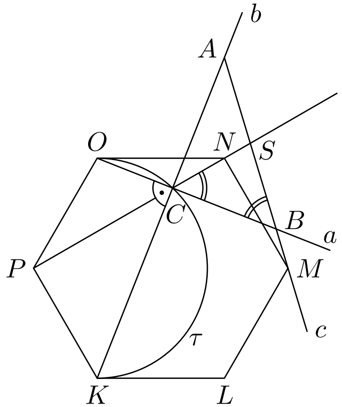
$$898 + 6k = 378,\ 900 - 6k = 378,\ 900 - 18k = 378$$

v oboru přirozených čísel k od 1 do 100. Řešení má pouze druhá a třetí rovnice, a to $k = 87$ resp. $k = 29$. Hodnotě $k = 87$ odpovídá umístění závorky před číslo $6k - 1 = 521$, hodnotě $k = 29$ odpovídá umístění závorky před číslo $6k = 174$.

Odpověď: Úloha má dvě řešení; závorku doplníme buďto bezprostředně před číslo 521, nebo bezprostředně před číslo 174.

6. *Je dán pravidelný šestiúhelník $KLMNOP$. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB tak, aby jeho vrchol C ležel na úsečce NP, body M, O, K ležely po řadě na přímkách AB, BC, CA a aby přímka NP rozdělila trojúhelník ABC na dvě části se stejným obsahem.*

Řešení. Jak je tomu u řešení konstrukčních úloh obvyklé, načrtneme nejdříve do jednoho obrázku daný šestiúhelník $KLMNOP$ i hledaný trojúhelník ABC tak, aby jejich tvar i vzájemná poloha aspoň přibližně odpovídaly zadání (obr. 6.1). To se žákům patrně nepodaří na první pokus; pokud jejich nezdary



Obr. 6.1

budou přetrvávat delší dobu, prozradíme jim, že speciální poloha daných bodů K, L, M, N, O, P nebude mít na způsob konstrukce trojúhelníku ABC žádný vliv. Proto je možné k rozboru úlohy využít i takový náčrtek, do kterého nejprve nakreslíme pravoúhlý trojúhelník ABC, teprve pak na přímkách AB, BC, CA

libovolně vybereme body M, O, K; konečně výběr bodů N a P podřídíme pouze tomu, že body N, C, P mají v tomto pořadí ležet na přímce, jež dělí trojúhelník ABC na dvě části se stejným obsahem; jde tedy o přímku CS, kde S je střed strany AB.

Z obrázku 6.1 je patrné, že bod C můžeme sestrojit jako průsečík úsečky NP s Thaletovou kružnicí τ nad průměrem OK, neboť úhel OCK je pravý. Jakmile takto nalezneme bod C, sestrojíme přímky $a = OC = BC$ a $b = KC = AC$. Všimněme si nyní trojúhelníku SBC. Podle Thaletovy věty platí $|SC| = |SB|$, takže přímka a svírá shodné ostré úhly s přímkami PN a AB (tyto úhly jsou vyznačeny na obrázku). Protože přímka a je již sestrojena a přímka PN je určena zadáním úlohy, má podle předchozí věty (prozatím neznámá) přímka $c = AB$ jednoznačně určený směr; protože má tato přímka c navíc procházet daným bodem M, můžeme ji nyní sestrojit. Pak už určíme vrcholy A a B jako průsečíky přímky c po řadě s přímkami b a a. Tím je celý postup konstrukce hotov. Důkaz správnosti: výsledkem konstrukce je zřejmě pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB, jehož vrchol C leží na úsečce NP a jehož strany BC, CA, AB leží po řadě na přímkách a, b, c, které procházejí po řadě body O, K, M; zbývá vysvětlit, proč průsečík S přímky PN s přeponou AB je jejím středem. To ale plyne z toho, že podle konstrukce má trojúhelník SBC shodné úhly při vrcholech B a C.

Ze vzájemné polohy úsečky NP a kružnice τ nad průměrem OK plyne, že pro každý pravidelný šestiúhelník $KLMNOP$ má úloha jediné řešení.