49. ročník matematické olympiády

Úlohy školní – klauzurní části I. kola kategorie A

1. Určete, pro která reálná čísla p má soustava rovnic

$$(x-y)^2 = p^2,$$
$$x^3 - y^3 = 16$$

právě jedno řešení v oboru reálných čísel.

2. Je dán trojúhelník ABC. Uvnitř jeho stran BC, CA, AB uvažujme po řadě body K, L, M takové, že úsečky AK, BL, CM se protínají v bodě U. Jestliže trojúhelníky AMU a KCU mají obsah P a trojúhelníky MBU a CLU obsah Q, pak $P = Q$. Dokažte.

3. Určete nejmenší přirozené číslo k, pro které platí: Vybereme-li libovolných k různých čísel z množiny $\{1, 2, 3, \dots, 2\,000\}$, pak mezi vybranými čísly existují dvě, jejichž součet nebo rozdíl je 667.

Školní – klauzurní část I. kola kategorie A se koná

v úterý 7. prosince 1999

tak, aby začala dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. První rovnice je splněna, právě když platí $x = y+p$ nebo $x = y-p$. Po dosazení do druhé rovnice dané soustavy dostaneme po úpravě v prvním případě kvadratickou rovnici

$$3py^2 + 3p^2y + p^3 - 16 = 0,$$

v druhém případě pak kvadratickou rovnici

$$3py^2 - 3p^2y + p^3 + 16 = 0$$

o neznámé y. Daná soustava rovnic bude mít právě jedno řešení v oboru reálných čísel, právě když jedna ze dvou předešlých kvadratických rovnic bude mít jediný (dvojnásobný) kořen a druhá z nich nebude mít žádný reálný kořen nebo bude mít stejný dvojnásobný kořen jako rovnice první (můžeme předpokládat, že $p \neq 0$, protože pro $p = 0$ daná soustava zřejmě nemá řešení). První kvadratická rovnice má diskriminant $D_1 = 3p(64 - p^3)$, druhá má diskriminant $D_2 = -3p(64 + p^3)$. Hledáme tedy ta $p \neq 0$, pro něž je jedno z čísel D_1, D_2 rovno nule a druhé záporné (případ $D_1 = D_2 = 0$ pro $p \neq 0$ totiž nenastane).

Je-li $D_1 = 0$, je $p = 4$ a $D_2 < 0$. Pokud $D_2 = 0$, je $p = -4$ a $D_1 < 0$. Hodnoty $p = 4$ a $p = -4$ jsou tedy jediné, které mají požadovanou vlastnost.

Daná soustava rovnic má přitom pro obě uvedené hodnoty parametru p jediné reálné řešení $(x, y) = (2, -2)$.

Jiné řešení. Z první rovnice máme $|x - y| = |p|$, z druhé rovnice však vidíme, že $x^3 > y^3$, což je ekvivalentní s nerovností $x > y$ (je $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ a $x^2 + xy + y^2 > 0$ pro libovolná reálná x, y s výjimkou případu $x = y = 0$). Je tedy $x = y + |p|$, $|p| > 0$. Po dosazení do druhé rovnice soustavy (pro jednoduchost pišme q místo $|p|$) dostaneme pro y kvadratickou rovnici

$$3qy^2 + 3q^2y + q^3 - 16 = 0$$

s diskriminantem $D(q) = 3q(64-q^3) = 3q(4-q)(16+4q+q^2)$. Má-li daná soustava v oboru reálných čísel jediné řešení, je nutně diskriminant $D(q)$ předešlé rovnice roven 0, tj. musí platit $(4 - q)(16 + 4q + q^2) = 0$ (víme, že $q = |p| > 0$). Protože pro libovolné reálné q je $16 + 4q + q^2 > 0$, musí být $q = |p| = 4$, tj. $p = 4$ nebo $p = -4$. Zároveň hned dostáváme, že $y = -\frac{1}{2}q = -2$ a $x = y + 4 = 2$.

Daná soustava rovnic má právě jedno reálné řešení, právě když $p = 4$ nebo $p = -4$, a to $(x, y) = (2, -2)$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V případě postupu analogického 1. řešení strhněte 2 body, není-li ověřeno, že druhá kvadratická rovnice nemá žádné řešení.

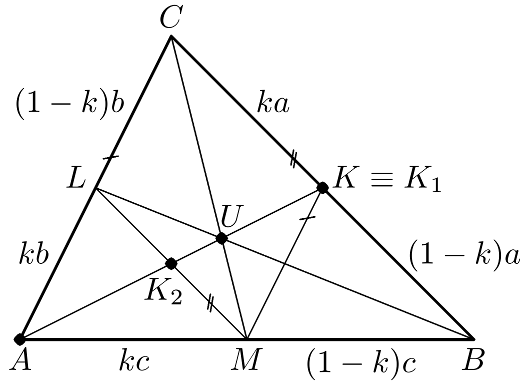
2. Z rovnosti obsahů trojúhelníků AMU a KCU plyne rovnost obsahů trojúhelníků AMC a AKC. Body K, M mají tedy stejnou vzdálenost od přímky AC. Odtud plyne, že $CA \parallel MK$ a čtyřúhelník $CAMK$ je tedy lichoběžník. Podobně dokážeme, že čtyřúhelník $BCLM$ je rovněž lichoběžník, kde $BC \parallel LM$. Trojúhelníky AML a ABC, resp. BKM a BCA jsou tedy stejnolehlé a platí (obr. 1)

$$|AL| = kb,\ |AM| = kc,\ |BM| = (1 - k)c,\ |BK| = (1 - k)a$$

a dále

$$|CK| = ka,\ |CL| = (1 - k)b, \quad \text{kde } k \in (0; 1).$$

Užitím Cèvovy věty pro trojici úseček AK, BL a CM, které se dle textu úlohy protínají



Obr. 1

v bodě U, dostáváme

$$\frac{kc}{(1-k)c} \cdot \frac{(1-k)a}{ka} \cdot \frac{(1-k)b}{kb} = 1.$$

Odtud plyne $\dfrac{1-k}{k} = 1$, neboli $k = \dfrac{1}{2}$. Tyto úsečky jsou tedy těžnice a jejich průsečík U je těžištěm daného trojúhelníku. Ze shodnosti úseček AM a BM již plyne rovnost obsahů trojúhelníků AMU a BMU, tedy rovnost $P = Q$, což jsme měli dokázat.

Jiné řešení (bez užití Cèvovy věty). Stejně jako v prvním řešení ukážeme, že úsečky BC a LM jsou rovnoběžné, takže si navzájem odpovídají v jisté stejnolehlosti se středem U a zároveň i v jisté stejnolehlosti se středem A. Označme K_1, K_2 po řadě středy obou uvažovaných úseček. Vzhledem k tomu, že body K_1, K_2 si odpovídají v obou zmíněných stejnolehlostech, leží body A a U (středy obou stejnolehlostí) na přímce K_1K_2. Odtud plyne, že střed K_1 strany BC leží na přímce AU, je tedy totožný s bodem K z textu úlohy. Úsečka AK je tudíž těžnicí trojúhelníku ABC. Podobně dokážeme, že i úsečka BL je těžnicí daného trojúhelníku. Bod U je tedy jeho těžištěm. Závěr je pak stejný jako v prvním řešení.

Za úplné řešení udělte 6 bodů (z toho 5 bodů za důkaz, že U je těžištěm daného trojúhelníku).

3. Ukážeme, že hledaným k je číslo 1 001. Rozdělme všechna čísla z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 2\,000\}$ do 1 000 dvojic

$$\{1, 666\},\ \{2, 665\},\ \{3, 664\},\ \ldots,\ \{333, 334\},$$
$$\{667, 1334\},\ \{668, 1\,335\},\ \{669, 1336\},\ \ldots,\ \{1\,333, 2\,000\}.$$

(Číslo 667 z textu úlohy je rovno součtu čísel každé dvojice v prvním řádku a rozdílu čísel každé dvojice v druhém řádku. Všimněme si, že skutečně každé z čísel $1, 2, 3, \ldots, 2\,000$ je zastoupeno právě v jedné dvojici.)

Číslo 1 001 má požadovanou vlastnost, protože pokud vybereme libovolně 1 001 čísel z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 2\,000\}$, budou mezi nimi obě čísla aspoň jedné z uvedených dvojic (máme vybráno 1 001 čísel, ale jen 1 000 dvojic). Součet nebo rozdíl čísel v nalezené dvojici je však 667.

Nyní ukážeme, že žádné číslo $k \leqq 1\,000$ požadovanou vlastnost nemá. Stačí to zřejmě ukázat pro $k = 1\,000$: vybereme-li 1 000 sudých čísel $2, 4, 6, \ldots, 2\,000$, je součet i rozdíl libovolných dvou vybraných čísel sudý, takže se nemůže rovnat lichému číslu 667.

Za úplné řešení je 6 bodů. Udělte 4 body za důkaz, že číslo 1 001 má požadovanou vlastnost a 2 body za důkaz, že číslo 1 000 nikoliv.