49. ročník matematické olympiády

Úlohy školní – klauzurní části I. kola kategorie B

1. Pro která reálná čísla a, b je funkce

$$f(x) = a|x-1| + b(x-3) + |x-b| + x - 1$$

omezená?

2. Je dána úsečka XZ délky 7 cm a její body S, Y tak, že $|XS| = 2\,\text{cm}$, $|YZ| = 1\,\text{cm}$. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB tak, aby bod S byl střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC a body X, Y, Z ležely po řadě na přímkách AC, AB, BC.

3. Do výrazu

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots + 99 - 100$$

jsme vepsali několik závorek tak, že nakonec jsou v každé dvojici odpovídajících si závorek právě tři čísla a výraz neobsahuje žádný součin. Kolik různých výsledků lze takto dostat?

Školní – klauzurní část I. kola kategorie B se koná

v úterý 25. ledna 2000

tak, aby začala dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. Uvažovaná funkce f je po částech lineární, proto je omezená na každém omezeném intervalu. Stačí tedy funkci f vyšetřit zvlášť pro $x \leqq \min(1, b)$ a zvlášť pro $x \geqq \max(1, b)$, kdy mají oba výrazy v absolutních hodnotách stejné znaménko.

a) Je-li $x \leqq \min(1, b)$, je

$$f(x) = a(1 - x) + b(x - 3) + b - x + x - 1 = (b - a)x - 2b + a - 1.$$

Funkce f bude na tomto intervalu omezená, právě když tu bude konstantní, tj. právě když $a = b$.

a) Je-li $x \geqq \max(1, b)$, je

$$f(x) = a(x - 1) + b(x - 3) + x - b + x - 1 = (a + b + 2)x - a + 4b - 1.$$

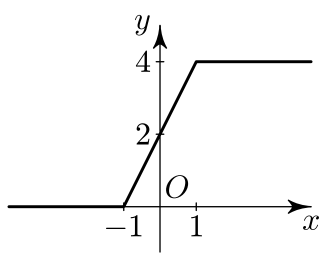
Funkce f bude na tomto intervalu omezená, právě když tu bude konstantní, tj. právě když $a + b = -2$.

Spojením obou podmínek dostáváme, že funkce f bude omezená, právě když bude omezená na obou uvedených neomezených intervalech, tj. právě když $a = b = -1$. Pro funkci f pak dostaneme vyjádření

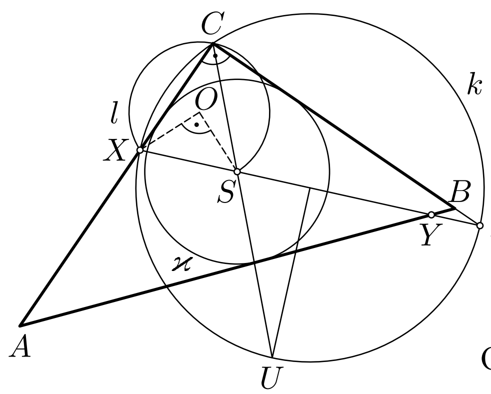
$$f(x) = |x + 1| - |x - 1| + 2.$$

Její graf vidíme na obr. 1.

Za úplné řešení je 6 bodů. Za zjištění, že stačí funkci f vyšetřovat jen na dvou neomezených intervalech, dejte 2 body a po 2 bodech za zdůvodnění jednotlivých podmínek $a = b$, $a + b = -2$. V případě diskuse případů $b \geqq 1$ a $b \leqq 1$ hodnoťte každý z nich třemi body.



Obr. 1



Obr. 2

2. Předpokládejme, že trojúhelník ABC je řešením úlohy. Z daného pořadí bodů X, S, Y, Z na jedné přímce a z toho, že bod S je vnitřním bodem trojúhelníku ABC, vyplývá, že body X a Y jsou vnitřními body příslušných stran AC a AB, zatímco bod Z musí ležet na polopřímce opačné k polopřímce BC. Vrchol C neznámého trojúhelníku ABC budeme hledat jen v jedné z polorovin určených přímkou XZ, protože ke každému řešení existuje řešení souměrně sdružené podle osy XZ.

Vrchol C trojúhelníku ABC je vrcholem pravého úhlu XCZ (obr. 2), leží tedy na Thaletově kružnici k nad průměrem XZ. Protože bod S je středem kružnice vepsané trojúhelníku ABC, leží na ose pravého úhlu, takže $|\sphericalangle SCX| = 45°$ a vrchol C leží zároveň na oblouku kružnice l určené tětivou SX a obvodovým úhlem $45°$. (Vzhledem k uvedené souměrnosti stačí uvažovat jen ten ze dvou souměrných oblouků, který leží ve zvolené polorovině.) Odtud už plyne konstrukce trojúhelníku ABC:

1. sestrojíme kružnici k nad průměrem XZ;
2. v jedné z polorovin určených přímkou XZ sestrojíme vrchol O rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku XSO, $|\sphericalangle SOX| = 90°$, a v téže polorovině narýsujeme oblouk SX kružnice $l(O, |OS|)$;
3. vrchol $C = k \cap \widehat{SX}$, $C \neq X$;
4. sestrojíme kružnici $\varkappa(S, \varrho)$, kde ϱ je vzdálenost bodu S od přímky CX (poloměr kružnice vepsané trojúhelníku ABC);
5. bodem Y vedeme tečnu t ke kružnici $\varkappa$ tak, aby její bod dotyku ležel v polorovině opačné k polorovině XZC;
6. vrcholy A, B dostaneme jako průsečíky přímky t s přímkami XC, resp. ZC.

Z popsané konstrukce je zřejmé, že pro bod S ležící mezi body X a Z mají kružnice k a l právě jeden průsečík různý od bodu X. Abychom mohli sestrojit tečnu t, musí bod Y ležet vně kruhu omezeného kružnicí $\varkappa$, musí tedy být $|SY| \geqq \varrho$. Aby existoval průsečík tečny t s přímkou XC uvnitř úhlu XCZ, musí být dokonce $|YS| > |XS| > \varrho$. V našem případě je to splněno a úloha má dvě shodná řešení souměrně sdružená podle osy XZ.

Úlohu bychom řešili stejně, i kdyby dané body X, S, Y, Z neležely na jedné přímce.

Poznámka. Bod C můžeme sestrojit i jiným postupem. Protože body X a Z leží po řadě na polopřímkách CA a CB, je pravý úhel XCZ totožný s pravým úhlem ACB. Osa tohoto úhlu prochází středem S kružnice vepsané trojúhelníku ABC; zároveň tato osa protne kružnici k opsanou trojúhelníku XCZ v takovém bodě $U \neq C$, že tětivy XU a UZ jsou shodné (tyto tětivy jsou totiž z bodu C vidět pod týmž úhlem (45 stupňů), obr. 2). Proto (aniž známe bod C) můžeme bod U sestrojit jako střed oblouku XZ kružnice k (oblouky XU a UZ jsou tedy čtvrtkružnice). Bod C pak určíme jako průsečík kružnice k s polopřímkou US.

Za úplné řešení je 6 bodů. Plný počet bodů dejte i v případě, že soutěžící zapomene uvést souměrně sdružené řešení.

3. V daném výrazu se pravidelně střídají plusy a minusy, přičemž lichá čísla mají znaménko plus a sudá minus. Zřejmě musí každá dvojice odpovídajících si závorek obsahovat právě tři po sobě jdoucí čísla. Umístíme-li levou závorku mezi plus a příslušné liché číslo, nemají závorky na hodnotu výrazu žádný vliv. Zajímavý je tedy jen případ, kdy levou závorku dáme mezi minus a následující sudé číslo, což změní výsledné znaménko druhého a třetího čísla v závorkách. Je-li zmíněné sudé číslo $2k$ $(1 \leqq k \leqq 49)$, dostaneme místo původního součtu $-2k + (2k+1) - (2k+2) = -2k - 1$ součet $-\bigl(2k + (2k+1) - (2k+2)\bigr) = -2k - (2k+1) + (2k+2) = -2k + 1$. Vidíme tedy, že přidáním jednoho páru závorek popsaným způsobem zvětšíme celkovou hodnotu výrazu o 2 bez ohledu na to, kterou trojici po sobě jdoucích čísel začínající sudým číslem zvolíme. Zároveň je jasné, že takto umístěný pár závorek obsahuje další sudé číslo (kromě čísla $2k$ ještě $2k+2$), které už nebudeme moci pro umístění závorky využít. (Nebudeme tedy zbytečně rozmisťovat závorky před lichá čísla, protože bychom se zbavili dalšího sudého čísla, před které lze umístit levou z dvojice závorek, jež by měly vliv na hodnotu daného výrazu.)

Daný výraz obsahuje celkem 50 sudých čísel. Můžeme tedy vybrat nejvýše 25 dvojic po sobě jdoucích sudých čísel, jež obklopíme závorkami. Tomu odpovídá 26 různých hodnot daného výrazu s k dvojicemi závorek, kde $0 \leqq k \leqq 25$. Příslušné hodnoty jsou -50, -48, $-46, \dots, 4, 2, 0$ (nejmenší hodnota je $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots + 99 - 100 = -50$, největší $1 - (2 + 3 - 4) + 5 - (6 + 7 - 8) + \ldots - (98 + 99 - 100) = 0$).

Za úplné řešení je 6 bodů.