49. ročník matematické olympiády

Úlohy školní – klauzurní části I. kola kategorie C

1. Najděte nejmenší přirozené číslo k, pro které platí: Vybereme-li libovolných k různých čísel z množiny $\{1, 4, 7, 10, 13, \dots, 1\,999\}$, pak mezi vybranými existují dvě různá čísla, jejichž součet se rovná $2\,000$.

2. Čtverec $ABCD$ a obdélník $AEFD$ mají takovou vzájemnou polohu, že bod B leží na kružnici vepsané trojúhelníku AEF. Vypočtěte poměr délky a šířky obdélníku $AEFD$.

3. Jestliže celé kladné číslo N vydělíme číslem 19 a získaný neúplný podíl dále vydělíme číslem 99, vyjde nám při druhém dělení stejný neúplný podíl a stejný zbytek, jako když původní číslo N vydělíme číslem 1 999. Určete jak nejmenší, tak největší takové číslo N.

Školní – klauzurní část I. kola kategorie C se koná

v úterý 25. ledna 2000

tak, aby začala dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

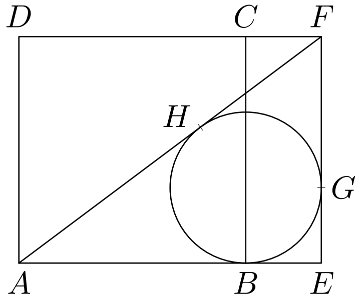
1. Označme $\mathsf{M} = \{1, 4, 7, 10, 13, \ldots, 1\,999\}$ a vypišme všechny součty dvou *různých* (nebudeme dále zdůrazňovat) čísel z M, které se rovnají číslu 2 000:

$$2\,000 = 1 + 1\,999 = 4 + 1\,996 = 7 + 1\,993 = \ldots = 997 + 1\,003.$$

S výjimkou jediného čísla 1 000 vystupuje každé číslo z M v právě jednom součtu (součet $1\,000 + 1\,000$ se dle zadání neuvažuje). Protože $997 = 1 + 3 \cdot 332$, je vypsáno právě 333 součtů. Lze tedy vybrat 334 čísel z M (po jednom z každého vypsaného součtu spolu s číslem 1 000, tedy například čísla $1, 4, 7, \ldots, 997, 1\,000$) tak, že součet žádných dvou vybraných čísel není 2 000. Vybereme-li však libovolných 335 čísel z M, pak některá dvě vybraná čísla jsou sčítanci jednoho z vypsaných součtů (zopakujme: vypsaných součtů je 333 a chybí v nich jediné číslo z M). Proto je $k = 335$ hledaná hodnota.

Za úplné řešení je 6 bodů: 3 body za vysvětlení, že číslo $k = 334$ nevyhovuje, 3 body za zdůvodnění, že číslo $k = 335$ vyhovuje.

2. Protože oba pravoúhelníky musí ležet ve stejné polorovině s hraniční přímkou AD, leží bod B na polopřímce AE. Proto se zmíněná kružnice dotýká strany AE trojúhelníku AEF právě v bodě B. Body, v nichž se kružnice dotýká stran EF a FA, označme po řadě G a H (obr. 1). Označme ještě $a = |AB| = |EF|$ a nechť $|AE| = ka$, $k > 1$. Ze souměrností



Obr. 1

dvojic tečen ke kružnici plynou rovnosti $|AH| = |AB| = a$, $|EG| = |EB| = |AE| - |AB| = (k-1)a$, $|FH| = |FG| = |EF| - |EG| = (2-k)a$, tudíž $|AF| = |AH| + |FH| = (3-k)a$. Pythagorova věta pro trojúhelník AEF tak dává rovnici $(3-k)^2 = k^2 + 1$, jež je po úpravě lineární a má (jediný) kořen $k = \frac{4}{3}$.

Odpověď: Hledaný poměr je $4 : 3$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 2 body za správný náčrtek nebo popis vzájemné polohy obou pravoúhelníků.

3. Zmíněná tři dělení zapíšeme rovnostmi $N = 19a + b$, $a = 99c + d$ a $N = 1\,999c + d$. Odtud vyplývá, že $19(99c + d) + b = 1\,999c + d$, neboli $18d + b = 118c$. Nejmenší a největší vyhovující N najdeme podle nejmenšího a největšího možného neúplného podílu c (při dělení čísla N číslem 1 999). Z rovnosti $18d + b = 118c$ plyne především, že $c > 0$ (kdyby bylo $c = 0$, bylo by $b = d = 0$, tedy i $N = 0$, ale N je kladné); pro $c = 1$ z rovnosti

$18d + b = 118$ usoudíme, že $d = 6$ a $b = 10$ (neboť pro zbytek b při dělení $N : 19$ platí $0 \leqq b \leqq 18$). Proto je nejmenší N rovno číslu $1\,999 \cdot 1 + 6 = 2\,005$. Abychom zjistili největší N, poznamenejme nejdříve, že pro zbytky d a b při děleních $a : 99$ a $N : 19$ platí nerovnosti $d \leqq 98$ a $b \leqq 18$, z nichž plyne odhad $118c \leqq 18 \cdot 98 + 18$, odkud $c \leqq 15$. Pro $c = 15$ ovšem z rovnosti $18d + b = 118 \cdot 15$ vyplývá, že $d = 98$ a $b = 6$, neboť $0 \leqq b \leqq 18$ a $118 \cdot 15 = 1\,770 = 18 \cdot 98 + 6$. Největší N je tudíž rovno $1\,999 \cdot 15 + 98 = 30\,083$.

Odpověď: Nejmenší vyhovující N je $2\,005$, největší takové N je $30\,083$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho za nalezení jednoho z obou čísel 2 body, k tomu další 1 bod za zdůvodnění, proč jde skutečně o extremální hodnotu.