49. ročník matematické olympiády

Úlohy II. kola kategorie A

1. Nechť $P(x)$ je kvadratický trojčlen. Určete všechny kořeny rovnice

$$P(x^2 + 4x - 7) = 0,$$

víte-li, že mezi nimi je číslo 1 a aspoň jeden kořen je dvojnásobný.

2. Je dán rovnoramenný lichoběžník $UVST$, v němž $3|ST| < 2|UV|$. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB tak, aby body B, C ležely na přímce VS, bod U na přímce AB a bod T byl těžištěm trojúhelníku ABC.

3. Dokažte, že pro libovolná kladná čísla a, b platí nerovnost

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \leqq \sqrt[3]{2(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}.$$

Zjistěte, kdy nastane rovnost.

4. Určete všechny konvexní čtyřúhelníky $ABCD$ s následující vlastností: Uvnitř čtyřúhelníku $ABCD$ existuje bod E takový, že každá přímka, která prochází tímto bodem a protíná strany AB a CD ve vnitřních bodech, dělí čtyřúhelník $ABCD$ na dvě části o stejném obsahu. Svou odpověď zdůvodněte.

II. kolo kategorie A se koná

v úterý 18. ledna 2000

tak, aby začalo dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. Označme $Q(x) = x^2 + 4x - 7$, potom $0 = P\bigl(Q(1)\bigr) = P(-2)$. Odtud plyne, že $P(x) = a(x+2)(x-p)$, kde a a p jsou reálná čísla, $a \neq 0$. Je tedy

$$\begin{aligned} P\bigl(Q(x)\bigr) &= a(x^2+4x-7+2)(x^2+4x-7-p) = \\ &= a(x-1)(x+5)(x^2+4x-7-p). \end{aligned}$$

To znamená, že kořeny dané rovnice jsou kromě čísel 1 a -5 ještě kořeny kvadratické rovnice

$$x^2 + 4x - 7 - p = 0. \tag{1}$$

Protože aspoň jeden z kořenů dané rovnice má být dvojnásobný, je buď aspoň jedno z čísel 1 a -5 kořenem rovnice (1), nebo má tato rovnice sama dvojnásobný kořen. Přitom z tvaru rovnice (1) plyne, že součet jejích kořenů je -4 (číslo opačné ke koeficientu u lineárního členu), takže tato rovnice má kořen 1, právě když má kořen -5.

Jsou tedy dvě možnosti:

a) Rovnice (1) má dva kořeny 1 a -5 (takže je $p = -2$) a rovnice $P\bigl(Q(x)\bigr) = a(x-1)^2(x+5)^2 = 0$ má dva dvojnásobné kořeny 1 a -5.

b) Rovnice (1) má sama dvojnásobný kořen. Protože součet jejích kořenů je -4, je dvojnásobným kořenem číslo $(-4) : 2 = -2$. (V tomto případě je $p = -11$ a $P\bigl(Q(x)\bigr) = a(x-1)(x+5)(x+2)^2 = 0$.)

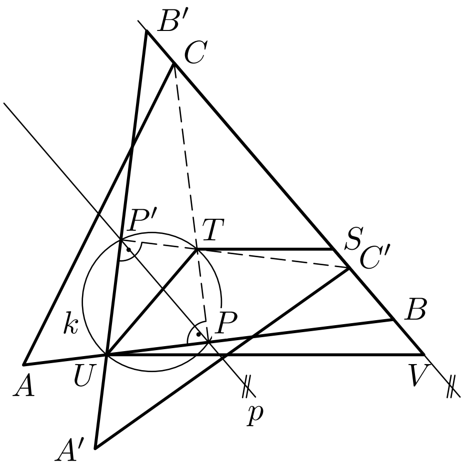
Závěr: Úloha má dvě řešení: daná rovnice má buď dva dvojnásobné kořeny 1 a -5, nebo má dva jednoduché kořeny 1 a -5 a dvojnásobný kořen -2.

Za úplné řešení je 6 bodů. Po 2 bodech udělte za nalezení obecného tvaru $P(x) = a(x+2)(x-p)$ a za úplné vyřešení obou případů a), b).

2. Označme P střed základny AB hledaného rovnoramenného trojúhelníku ABC. Protože vrchol U daného lichoběžníku $UVST$ leží na přímce AB, je buď $U = P$, anebo tvoří body T, U, P vrcholy pravoúhlého trojúhelníku (obr. 1). V obou případech bod P leží na Thaletově kružnici k sestrojené nad průměrem TU. Označme d vzdálenost vrcholu T daného lichoběžníku od přímky VS. Vzhledem k tomu, že T je těžištěm trojúhelníku ABC, má jeho výška z vrcholu A velikost $3d$, tudíž bod P leží na přímce p, která je s přímkou VS rovnoběžná, má od ní vzdálenost $\frac{3}{2}d$ a leží v polorovině VST. Odtud již plyne *konstrukce* trojúhelníku ABC:

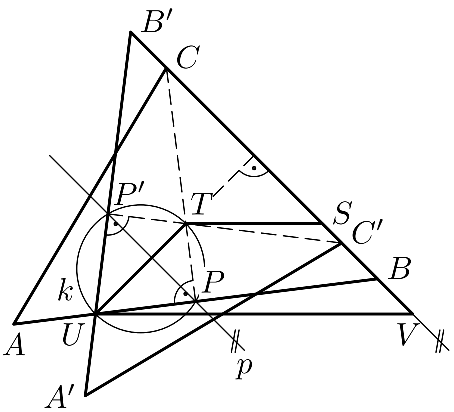
1. sestrojíme kružnici k s průměrem TU;
2. sestrojíme v polorovině VST přímku $p \parallel VS$ ve vzdálenosti $\frac{3}{2}d$ od VS;
3. sestrojíme bod $P \in k \cap p$;
4. sestrojíme přímku $PB \perp TP$, $B \in VS$;
5. sestrojíme vrcholy A ($A \in PB$, $A \neq B$, $|AP| = |PB|$) a C ($C \in PT \cap VS$).

Diskuse: Protože dle předpokladu je $ST \parallel UV$ a $\frac{3}{2}|ST| < |UV|$, protne přímka p stranu TU daného lichoběžníku ve vnitřním bodě, bude tedy sečnou kružnice k a protne ji ve dvou různých bodech P a P' (obr. 1). Pro každý z nich dostáváme jedno řešení, trojúhelníky

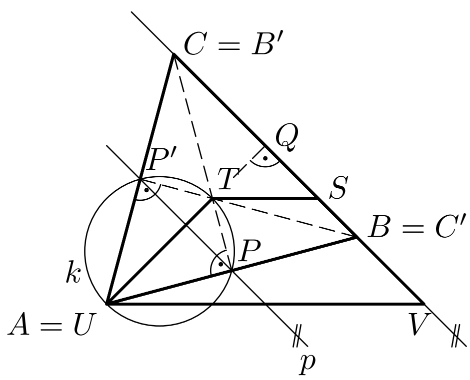


Obr. 1

ABC a $A'B'C'$. Z konstrukce je dále zřejmé, že pokud bude $TU \perp SV$, budou oba body P, P' souměrně sdružené podle osy TU, takže dostaneme dva shodné (souměrně sdružené) trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ (obr. 2). Obě souměrná řešení splynou v jedno v případě, kdy vyjde $A = U$. Přitom bude těžiště T trojúhelníku ABC zároveň průsečíkem jeho výšek, takže výsledný trojúhelník ABC bude rovnostranný (obr. 3). To nastane, právě když obě ramena daného lichoběžníku jsou navzájem kolmá a navíc platí $3|ST| = |UV|$, jak plyne z podobnosti trojúhelníků $UVQ \sim TSQ$. V tomto jediném případě má úloha jedno řešení. Ve všech ostatních případech má úloha dvě řešení (která jsou pro $TU \perp SV$ shodná).



Obr. 2



Obr. 3

Za úplné řešení je 6 bodů. Není-li uveden počet řešení úlohy, strhněte 2 body. Pokud je v diskusi pominut případ, kdy obě ramena lichoběžníku jsou navzájem kolmá, strhněte 1 bod.

3. Umocněním obou stran dané nerovnosti na třetí dostaneme ekvivalentní nerovnost

$$\frac{a}{b} + 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + 3\sqrt[3]{\frac{b}{a}} + \frac{b}{a} \leqq 4 + 2\frac{a}{b} + 2\frac{b}{a}$$

neboli

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 4 \geqq 3\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right). \tag{1}$$

V předcházející nerovnosti položme $x = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ $(x > 0)$. Po vynásobení obou stran nerovnosti (kladným) číslem x^3 a snadné úpravě obdržíme ekvivalentní nerovnost

$$x^6 - 3x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 1 \geqq 0.$$

Nejdříve zjistíme, zda rovnice $x^6 - 3x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ nemá celočíselný kořen. Takový kořen musí dělit absolutní člen, takže jsou jen dvě možnosti, 1 a -1. Snadno ověříme, že uvedená rovnice má kořen $x = 1$, a po dělení dvojčlenem $(x - 1)$ zjistíme, že jde dokonce o kořen dvojnásobný a že platí rozklad

$$x^6 - 3x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 1 = (x - 1)^2(x^4 + 2x^3 + 2x + 1).$$

Pro každé $x > 0$ je $x^4 + 2x^3 + 2x + 1 > 0$. Platí tedy

$$x^6 - 3x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 1 = (x - 1)^2(x^4 + 2x^3 + 2x + 1) \geqq 0,$$

což jsme měli dokázat. Rovnost v předchozí nerovnosti přitom nastává, právě když $x = 1$, tj. právě když platí $a = b$.

Druhé řešení. Užitím nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem pro trojici kladných čísel $\frac{a}{b}$, 1, 1 dostaneme

$$\frac{a}{b} + 1 + 1 \geqq 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}},$$

a obdobně

$$\frac{b}{a} + 1 + 1 \geqq 3\sqrt[3]{\frac{b}{a}}.$$

V obou předchozích nerovnostech nastává rovnost, právě když $a = b$. Jejich součtem pak vyjde

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 4 \geqq 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + 3\sqrt[3]{\frac{b}{a}},$$

což je nerovnost (1).

Třetí řešení. Podle nerovnosti mezi mocninnými průměry stupně $\frac{1}{3}$ a $\frac{1}{2}$ dostáváme pro kladná čísla $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{a}$ nerovnost (viz např. J. Herman, R. Kučera, J. Šimša: Metody řešení matematických úloh I, str. 174)

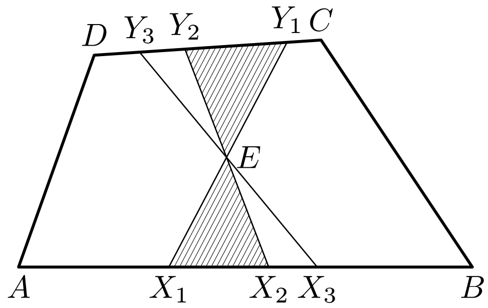
$$\left(\frac{\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}}}{2}\right)^3 \leqq \left(\frac{\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}}{2}\right)^2,$$

v níž nastává rovnost, právě když $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{a}$, tj. právě když $a=b$.

Protože $\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)^2=(a+b)\Big(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\Big)$, dostáváme odtud po jednoduché úpravě dokazovanou nerovnost, v níž nastává rovnost, právě když $a=b$.

Za úplné řešení je 6 bodů. Za správný důkaz nerovnosti udělte 4 body, za nalezení podmínky pro rovnost 2 body. Přitom za poznatek, že rovnost platí v případě $a=b$, udělte 1 bod, další 1 bod dejte za zdůvodnění, že je to jedině tehdy.

4. Nechť E je vnitřním bodem takového konvexního čtyřúhelníku $ABCD$, který vyhovuje podmínkám úlohy. Uvažujme přímky X_1Y_1, X_2Y_2 a X_3Y_3, které procházejí bodem E a protínají po řadě strany AB a CD v bodech X_1 a Y_1, X_2 a Y_2, X_3 a Y_3 (obr. 4). Jestliže všechny tři uvažované přímky dělí čtyřúhelník $ABCD$ na dvě části o stejném obsahu, rovnají se i obsahy trojúhelníků EX_1X_2 a EY_1Y_2, resp. EX_2X_3 a EY_2Y_3. Protože tyto trojúhelníky mají vždy shodné vnitřní úhly při vrcholu E, plyne z rovnosti jejich obsahů rovnost



Obr. 4

$$|EX_1|\cdot|EX_2|=|EY_1|\cdot|EY_2|,$$

resp.

$$|EX_2|\cdot|EX_3|=|EY_2|\cdot|EY_3|.$$

Z obou předešlých rovností dostáváme

$$\frac{|EX_1|}{|EX_3|}=\frac{|EY_1|}{|EY_3|}.$$

Trojúhelníky EX_1X_3 a EY_1Y_3 jsou tedy podobné (podle věty sus) a mají týž obsah. Jsou proto středově souměrné podle středu E a platí tudíž $X_1X_3 \parallel Y_1Y_3$. Čtyřúhelník $ABCD$ má tedy nutně rovnoběžné strany AB a CD.

Naopak každý (konvexní) čtyřúhelník $ABCD$, v němž platí $AB \parallel CD$, vyhovuje podmínkám úlohy. Za bod E pak zvolíme střed úsečky spojující středy rovnoběžných stran AB a CD; požadovaná vlastnost takového bodu je zřejmá.

Závěr: Podmínkám úlohy vyhovují právě všechny konvexní čtyřúhelníky $ABCD$, v nichž $AB \parallel CD$.

Za úplné řešení je 6 bodů. Za důkaz, že čtyřúhelník $ABCD$ má nutně rovnoběžné strany AB a CD, udělte 4 body. Za ověření skutečnosti, že každý takový čtyřúhelník (spolu s charakterizací bodu E) vyhovuje podmínkám úlohy, udělte 2 body.