49. ročník matematické olympiády

Úlohy II. kola kategorie B

1. Zjistěte všechna reálná čísla c, pro která má rovnice

$$(c^2 + c - 8)(x + 2) - 8|x - c + 2| = c|x + c + 14|$$

nekonečně mnoho řešení v oboru celých čísel.

2. Devítistěn vznikl slepením krychle a pravidelného čtyřbokého jehlanu. Na každé stěně tohoto devítistěnu je napsáno jedno číslo. Jejich součet je 3 003. Pro každou stěnu S uvažovaného devítistěnu sečtěme čísla na všech stěnách, s nimiž má S společnou právě jednu hranu. Dostaneme tak devět stejných součtů. Určete všechna čísla napsaná na stěnách devítistěnu.

3. Je dán lichoběžník $ABCD$, v němž $|AB| = 8\,\text{cm}$ a $|\sphericalangle ABC| = 90°$. Jeho obvod je $28\,\text{cm}$. Polokružnice k s průměrem AB se dotýká strany CD. Vypočtěte délky zbývajících stran daného lichoběžníku, je-li strana AB jeho
a) základnou,
b) ramenem.

4. Je dán obdélník $KLMN$, $|KN| > |KL|$. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB délky $|KL|$ tak, aby jeho výška v_a obsahovala body K, N, výška v_b bod L a výška v_c bod M. (Výškami zde rozumíme přímky.)

II. kolo kategorie B se koná

v úterý 28. března 2000

tak, aby začalo dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. Označíme-li pro dané reálné c

$$f_c(x) = c|x + c + 14| + 8|x - c + 2| - (c^2 + c - 8)(x + 2)$$

odpovídající po částech lineární funkci, je zřejmé, že rovnice $f_c(x) = 0$ bude mít nekonečně mnoho celočíselných řešení, právě když bude funkce f_c identicky rovna nule na některém z nekonečných intervalů $(-\infty, \min(c-2, -c-14)\rangle$ nebo $\langle \max(c-2, -c-14), \infty)$. Vyšetříme postupně obě možnosti.

a) Nechť $x \leqq \min(c-2, -c-14)$, pro taková x platí

$$\begin{aligned} f_c(x) &= -c(x + c + 14) - 8(x - c + 2) - (c^2 + c - 8)(x + 2) = \\ &= -c(2 + c)x - 3c^2 - 8c = -c\big(x(c+2) + 3c + 8\big). \end{aligned}$$

Na tomto intervalu bude funkce f_c identicky rovna nule, právě když $c = 0$ (soustava $c + 2 = 0$, $3c + 8 = 0$ nemá žádné řešení).

b) Nechť $x \geqq \max(c-2, -c-14)$, pro taková x platí

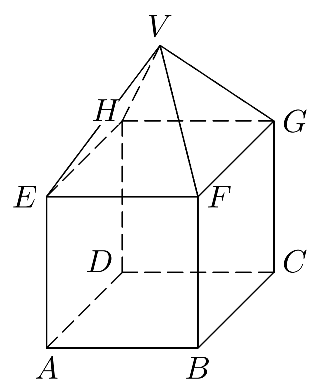
$$\begin{aligned} f_c(x) &= c(x + c + 14) + 8(x - c + 2) - (c^2 + c - 8)(x + 2) = \\ &= (16 - c^2)x - c^2 + 4c + 32. \end{aligned}$$

Na tomto intervalu bude funkce f_c identicky rovna nule, právě když bude současně platit $c^2 = 16$ a $c^2 - 4c - 32 = 0$. Dosazením $c^2 = 16$ do druhé rovnice vychází $c = -4$, což je zřejmě jediné řešení obou rovnic.

Závěr. Daná rovnice má v oboru celých čísel nekonečně mnoho řešení, právě když $c = 0$ nebo $c = -4$ (v prvním případě rovnici vyhovují všechna celá čísla $x \leqq -14$, v druhém pak všechna celá čísla $x \geqq -6$).

Za úplné řešení je 6 bodů, dva body za myšlenku, že uvedená funkce musí být nulová na neomezeném intervalu, po dvou bodech za každou z obou možností.

2. Označme A, B, C, D, E, F, G, H vrcholy zmíněné krychle a V vrchol přilepeného jehlanu (obr. 1). Čísla napsaná na bočních stěnách $ABFE$, $BCGF$, $CDHG$, $DAEH$ označme postupně a_1, a_2, a_3 a a_4, čísla na bočních stěnách EFV, FGV, GHV a HEV přilepeného jehlanu označme po řadě b_1, b_2, b_3 a b_4, číslo na podstavě $ABCD$ označme c. Dále označme s uvedený společný součet.



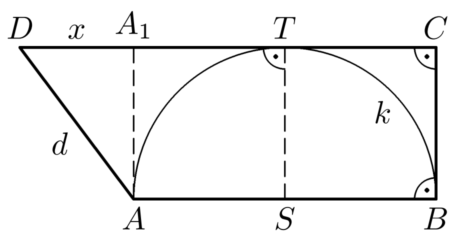
Obr. 1

Porovnáním součtů příslušných stěnám EFV a GHV dostaneme rovnost $a_1 = a_3$, analogicky pro další dvojici stěn vyjde $a_2 = a_4$. Porovnáním součtů příslušných stěnám $ABFE$ a $CDHG$ vyjde $b_1 = b_3$ a analogicky pro další takovou dvojici stěn $b_2 = b_4$. Porovnáním součtů příslušných stěnám $CDHG$ a HEV dostaneme rovnost $b_1 = c + a_2$ a analogicky pro dvojici stěn $DAHE$ a GHV rovnost $b_2 = c + a_1$. Porovnáním součtů dvou sousedních stěn krychle vychází $a_2 + a_4 + b_1 = a_1 + a_3 + b_2$, neboli $2a_2 + b_1 = 2a_1 + b_2$, což dosazením z posledních dvou získaných rovností dává rovnost $a_2 = a_1$, a tedy také $b_2 = b_1 = c + a_1$. Můžeme proto psát $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a$, $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = b = a + c$ a z rovnosti součtů příslušných podstavě a jedné z bočních stěn krychle vychází $4a = 2a + b + c = 3a + 2c$, takže $a = 2c$, $b = 3c$ a celkový součet všech čísel je $c + 4a + 4b = 21c$. Z rovnice $21c = 3\,003$ plyne $c = 143$. Na stěnách devítistěnu jsou napsána čísla 143, 286 (čtyřikrát) a 429 (čtyřikrát).

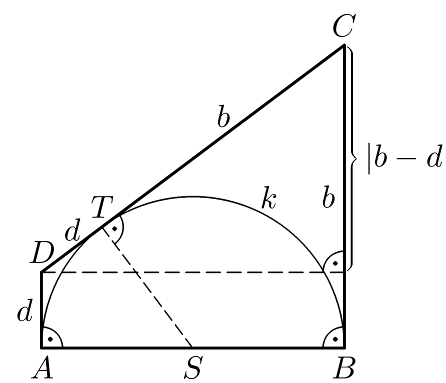
Poznámka. Úlohu je možno řešit i vypsáním a následným řešením soustavy deseti lineárních rovnic pro devět neznámých čísel zapsaných na stěnách tělesa a desátou neznámou rovnou jednotnému součtu.

Za úplné řešení je 6 bodů, z toho 1 bod za rovnosti $a_3 = a_1$, $a_4 = a_2$ a 1 bod za rovnosti $b_3 = b_1$, $b_4 = b_2$. Pokud jsou tyto symetrie pouze intuitivně uhodnuty, strhněte 2 body.

3. Označme S střed strany AB a T bod dotyku polokružnice k se stranou CD. Jestliže je AB základnou daného lichoběžníku, je $CD \parallel AB$ a $|AB|+|BC|+|CT| = 2|AB| = 16\,\text{cm}$ (obr. 2). Označme A_1 kolmý průmět vrcholu A na přímku CD. Protože $|TD| + |DA| = 28\,\text{cm} - 16\,\text{cm} = 12\,\text{cm} > |AA_1| + |A_1T| = 8\,\text{cm}$, leží vrchol D na polopřímce TA_1 za bodem A_1. Označme velikost $|A_1D| = x\,\text{cm}$, $|DA| = d\,\text{cm}$. Pro čísla x, d dostáváme soustavu rovnic $d+x = 8$, $d^2 = x^2 + 4^2$ (Pythagorova věta pro trojúhelník AA_1D), kterou snadno upravíme na tvar $d+x = 8$, $(d-x)(d+x) = 16$, tj. $d+x = 8$, $d-x = 2$. Soustava má jediné řešení $d = 5$, $x = 3$. Zbývající strany daného lichoběžníku mají tedy velikosti 4 cm, 11 cm a 5 cm.



Obr. 2



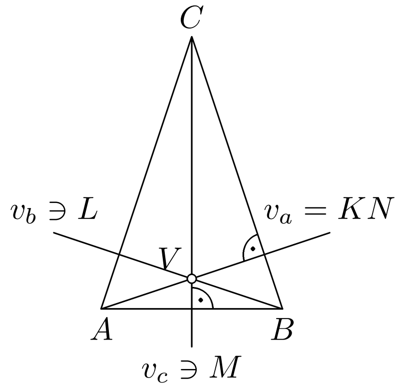
Obr. 3

Je-li AB ramenem daného lichoběžníku $ABCD$, je $AB \perp BC \parallel AD$ (obr. 3), takže obě základny BC a AD se dotýkají polokružnice k v odpovídajících vrcholech B a A. Označme b shodné úseky tečen z vrcholu C a d shodné úseky tečen z vrcholu D k polokružnici k. Ze znalosti obvodu tak dostáváme (v centimetrech) rovnost $28 = 8 + 2b + 2d$, neboli $b + d = 10$. Z rovnoběžnosti $BC \parallel AD$ plyne $|b - d| = \sqrt{(b+d)^2 - 8^2} = 6$. Vzhledem k souměrnosti podle osy dané polokružnice k stačí uvažovat jen jednu z možností, např. $b > d$. Soustava $b + d = 10$, $b - d = 6$ má jediné řešení $b = 8$, $d = 2$, takže zbývající strany daného lichoběžníku mají v tomto případě velikosti 8 cm, 10 cm a 2 cm, což platí i v případě $b < d$.

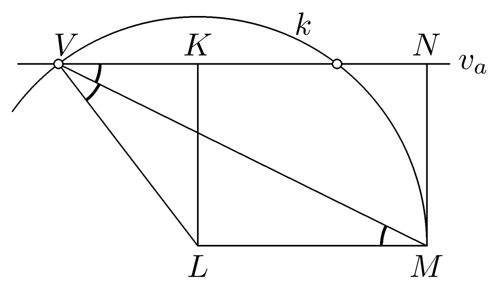
Za úplné řešení je 6 bodů, za každé správné řešení 3 body.

4. Podle zadání známe přímku KN, na níž leží výška v_a. Protože výška v_b je souměrně sdružená s v_a podle osy základny AB hledaného rovnoramenného trojúhelníku ABC, na níž zároveň leží jeho třetí výška v_c, pokusíme se najít průsečík V těchto výšek. Ten má tu vlastnost, že bod L leží na přímce souměrně sdružené s $v_a = KN$ podle $VM = v_c$ (obr. 4). Jakmile bod V najdeme, budeme zároveň znát polohu všech tří výšek trojúhelníku ABC, takže až na podobnost můžeme sestrojit i hledaný trojúhelník ABC.

Předpokládejme, že bod V na přímce KN má požadovanou vlastnost (obr. 5). Ze souměrnosti přímek VL a VN podle VM plyne rovnost vyznačených úhlů s vrcholem V. Z rovnoběžnosti přímek KN a LM dostáváme, že stejnou velikost má i úhel LMV, takže



Obr. 4

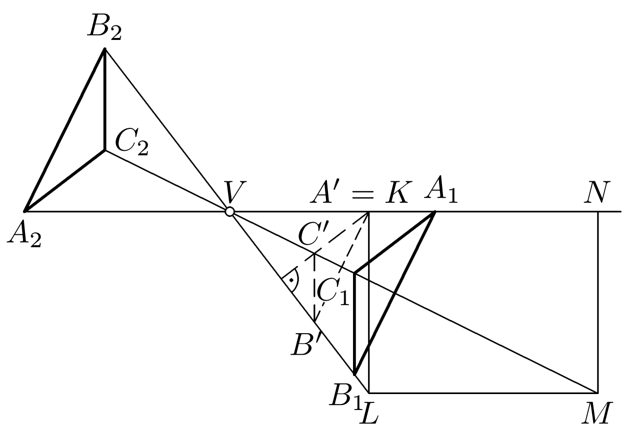


Obr. 5

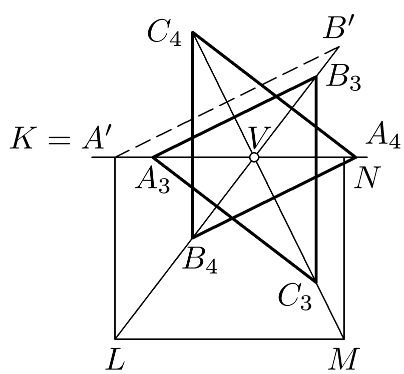
trojúhelník MVL je rovnoramenný se základnou MV. Je tudíž $|LV| = |LM|$ a bod V najdeme jako průsečík přímky KN s kružnicí $k = (L, |LM|)$. Protože dle předpokladu je $|KL| < |KN| = |LM|$, existují takové průsečíky dva.

Nyní dokončíme konstrukci trojúhelníku ABC. Nejprve sestrojíme pomocný trojúhelník $A'B'C'$, který bude stejnolehlý s hledaným trojúhelníkem ABC, a to tak, že na přímce KN libovolně zvolíme bod $A' \neq V$ (na obr. 6 je jako bod A' zvolen daný vrchol K), sestrojíme bod B' souměrně sdružený s bodem A' podle VM a vrchol C', v němž kolmice na $B'V$ vedená bodem A' protne přímku VM. Protože má platit $|AB| = |KL|$, trojúhelník ABC sestrojíme užitím té stejnolehlosti se středem V, která známou úsečku $A'B'$ převede na hledanou úsečku AB dané délky $|KL|$ (takové stejnolehlosti jsou dvě). Pro každý z možných bodů V tak bude mít úloha dvě řešení (na obr. 6 trojúhelníky $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$, na obr. 7 trojúhelníky $A_3B_3C_3$ a $A_4B_4C_4$) středově souměrná podle příslušného průsečíku výšek.

Za úplné řešení je 6 bodů. Má-li řešitel z každé dvojice stejnolehlých řešení vždy jen jedno, strhněte dva body.



Obr. 6



Obr. 7