49. ročník matematické olympiády

Úlohy II. kola kategorie C

1. Ze dřeva je vyrobeno šest shodných pravidelných čtyřbokých jehlanů a krychle. Stěna krychle je shodná s podstavami jehlanů. Určete poměr povrchu krychle a tělesa, které vznikne slepením podstav jehlanů se stěnami krychle, je-li poměr objemů těchto těles 1 : 2.

2. Milan zapsal za sebe několik prvních přirozených čísel, vynechal při tom jen čísla 4, 9, 14, 19, 24, 29, … Pak mezi zapsaná čísla vepsal střídavě znaky minus a plus, takže dostal výraz

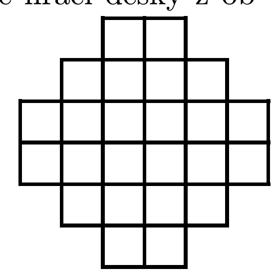
$$1 - 2 + 3 - 5 + 6 - 7 + 8 - 10 + 11 - 12 + 13 - 15 + \ldots$$

Nakonec ještě vepsal levou závorku za každý znak minus a stejný počet pravých závorek zapsal až na konec výrazu:

$$1 - (2 + 3 - (5 + 6 - (7 + 8 - (10 + 11 - (12 + 13 - (15 + \ldots))))))$$

Výsledný výraz měl hodnotu 103. Kolik čísel v Milanově výrazu bylo? (Zjistěte všechny možnosti.)

3. Jaký největší počet figurek je možno rozestavit na jednotlivá pole hrací desky z obrázku tak, aby v žádné šikmé řadě nebyla figurkami obsazena žádná tři sousední pole? Nezapomeňte zdůvodnit, proč větší počet figurek takto rozestavit nelze. (Šikmou řadou rozumíme takovou skupinu polí, jejichž úhlopříčky jednoho z obou směrů leží na jedné přímce.)



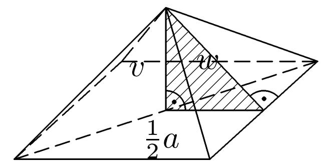
4. V rovině jsou dány body A, L, M takové, že $|AL| = 6{,}3\,\text{cm}$, $|AM| = 5{,}6\,\text{cm}$, $|LM| = 1{,}8\,\text{cm}$. Sestrojte lichoběžník $ABCD$, jemuž lze vepsat kružnici, která se dotýká ramene BC v bodě L a základny CD v bodě M (body dotyku se základnou AB a ramenem AD lichoběžníku $ABCD$ nejsou dány).

II. kolo kategorie C se koná

v úterý 28. března 2000

tak, aby začalo dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. Povrch vzniklého tělesa je tvořen všemi 24 bočními stěnami daných šesti jehlanů. Označme v výšku těchto jehlanů a a délku jejich podstavné hrany (jež je shodná s hranou dané krychle). Ze zadání úlohy vyplývá, že objem jednoho jehlanu je šestinou objemu krychle, tedy $\frac{1}{3}a^2v = \frac{1}{6}a^3$, odkud $v = \frac{1}{2}a$. Boční stěna jehlanu je rovnoramenný trojúhelník, pro jehož výšku w z hlavního vrcholu (obr. 1) platí podle Pythagorovy věty rovnost $w^2 = v^2 + (\frac{1}{2}a)^2$, odkud po dosazení $v = \frac{1}{2}a$ vychází $w = \frac{\sqrt{2}}{2}a$. Proto je obsah boční stěny jehlanu roven $\frac{1}{2}aw = \frac{\sqrt{2}}{4}a^2$. Výsledné těleso má povrch 24krát větší, tedy $6\sqrt{2}a^2$, zatímco povrch krychle je $6a^2$.



Obr. 1

Odpověď: Poměr povrchů původní krychle a výsledného tělesa je $1 : \sqrt{2}$.

Poznámka. Za daných předpokladů vznikne slepením těleso, které bude mít dvanáct shodných stěn (tzv. kosočtverečný dvanáctistěn). Uvedené shodné jehlany mají totiž v součtu stejný objem jako daná krychle a dostaneme je, když krychli rozdělíme na šest shodných jehlanů se společným hlavním vrcholem ve středu krychle.

Za úplné řešení je 6 bodů, z toho 3 body za určení vztahu $a = 2v$.

2. V daném výrazu odstraníme závorky a čísla sdružíme do čtveřic:

$$\underbrace{1-2-3+5}+\underbrace{6-7-8+10}+\underbrace{11-12-13+15}+\underbrace{16-17-18+20}+\ldots$$

(poslední skupina je kratší, není-li počet N všech čísel násobkem čtyř). Čísla v i-té skupině ($i = 1, 2, \ldots$) tvoří výraz $(5i-4)-(5i-3)-(5i-2)+5i$, jehož hodnota je zřejmě rovna jedné (nezávisle na indexu i). Proto je hodnota V celého výrazu v případě $N = 4k$ rovna $V = k$, v případě $N = 4k+1$ rovna $V = k + (5k+1) = 6k+1$, v případě $N = 4k+2$ rovna $V = k + (5k+1) - (5k+2) = k-1$ a v případě $N = 4k+3$ rovna $V = k + (5k+1) - (5k+2) - (5k+3) = -4k-4$. Snadno se zjistí, kdy $V = 103$:

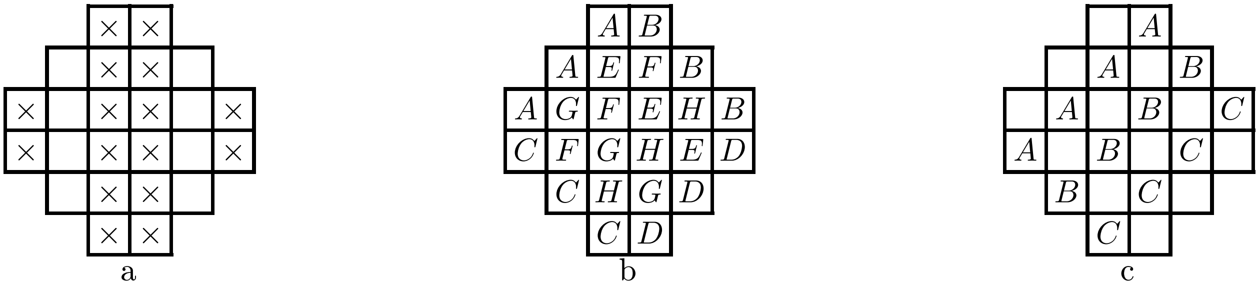
$$\begin{array}{llll}
N = 4k, & V = k = 103, & & N = 412,\\
N = 4k+1, & V = 6k+1 = 103, & k = 17, & N = 69,\\
N = 4k+2, & V = k-1 = 103, & k = 104, & N = 418,\\
N = 4k+3, & V = -4k-4 = 103, & k \notin \mathbb{N}. &
\end{array}$$

Odpověď: V Milanově výrazu bylo buď 69, nebo 412, nebo 418 čísel.

Za úplné řešení je 6 bodů, za správné odstranění závorek udělte 2 body.

3. Příklad z obr. 2a ukazuje, že je možno požadovaným způsobem rozestavit 16 figurek (obsazená pole jsou označena křížky). Vysvětlíme nyní, proč více figurek rozestavit nelze. Na obr. 2b vidíte rozdělení všech polí desky do osmi šikmých řad po třech polích, když pole téže řady-trojice jsou označena stejným písmenem. Figurkami je možno obsadit nejvýše dvě pole v každé řadě-trojici (2 pole A, 2 pole B, …, 2 pole H), celkem nejvýše $8 \cdot 2 = 16$ polí.

Tvrzení o tom, že nelze rozestavit více než 16 figurek, zdůvodníme ještě jinak, postupem obdobným z řešení úlohy domácího kola. Šikmé řady jednoho směru mají postupně 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3 pole, v nich lze obsadit nejvýše 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2 pole. Součet posledních čísel je sice 17, ale kdyby v každé ze tří uvažovaných řad o 4 polích (řady polí A, polí B a polí C na obr. 2c) byla obsazena 3 pole, musela by být obsazena všechna krajní pole těchto tří řad, ta však tvoří dvě šikmé řady-trojice druhého směru (krajní šikmé řady ABC na obr. 2c).



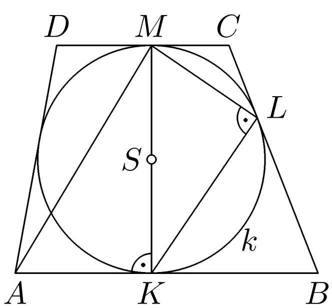
Obr. 2

Odpověď: Největší možný počet rozmístěných figurek je 16.

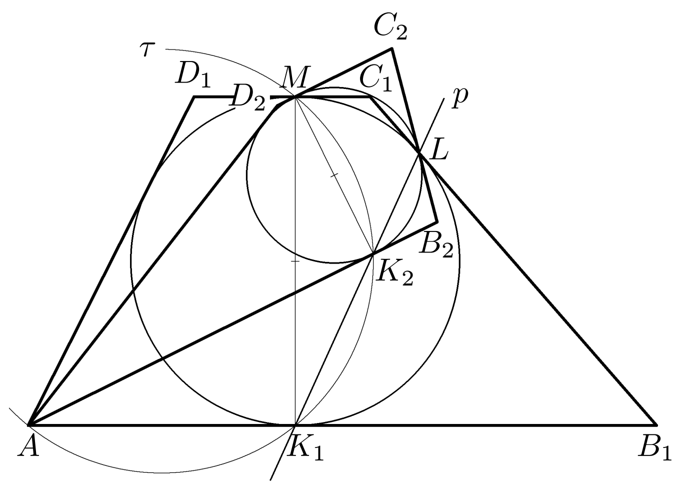
Za úplné řešení je 6 bodů, 3 body za příklad rozmístění 16 figurek, další body podle úplnosti úvah, proč větší počet figurek rozmístit nelze.

4. Označme k vepsanou kružnici, S její střed a K bod dotyku kružnice k se základnou AB (obr. 3). Protože $AB \parallel CD$, $SK \perp AB$ a $SM \perp CD$, je KM průměr kružnice k. Proto jsou oba úhly AKM a KLM pravé, bod K tudíž sestrojíme jako průsečík Thaletovy kružnice τ nad průměrem AM s přímkou p, jež prochází bodem L a je kolmá na LM. Zbytek konstrukce je snadný: bod S určíme jako střed úsečky KM, sestrojíme kružnici $k = (S, |SK|)$ a v bodech L a M po řadě její tečny b a c. Vrchol B pak určíme jako průsečík polopřímky AK s přímkou b, vrchol C jako průsečík přímek b a c, konečně vrchol D sestrojíme jako průsečík přímky c s tečnou d kružnice k, jež je souměrně sdružená s tečnou AK podle osy AS. Pro trojúhelník ALM ze zadání má kružnice τ s přímkou p společné dva body, které jsou na obr. 4 označeny K_1, K_2, proto má úloha dvě řešení — lichoběžníky $AB_1C_1D_1$ a $AB_2C_2D_2$.

Za úplné řešení je 6 bodů. Uvede-li řešitel jen jedno řešení, strhněte dva body.



Obr. 3



Obr. 4