49. ročník matematické olympiády, III. kolo kategorie A

Bílovec, 9.–12. dubna 2000

1. *Nechť n je přirozené číslo. Dokažte, že součet $4 \cdot 3^{2^n} + 3 \cdot 4^{2^n}$ je dělitelný třinácti, právě když n je sudé.* *(J. Šimša)*

Řešení. Označme $a_n = 4 \cdot 3^{2^n} + 3 \cdot 4^{2^n}$. Ukážeme nejprve, že pro každé přirozené číslo n je rozdíl $a_{n+2} - a_n$ dělitelný třinácti. Po úpravách obdržíme rovnost

$$a_{n+2} - a_n = 4 \cdot (81^{2^n} - 3^{2^n}) + 3 \cdot (256^{2^n} - 4^{2^n}). \tag{1}$$

Položme ve známém vzorci

$$A^p - B^p = (A - B)(A^{p-1} + A^{p-2}B + \ldots + B^{p-1}),$$

který platí pro každé přirozené p a pro libovolná dvě reálná čísla A a B, nejprve $p = 2^n$, $A = 81$, $B = 3$ a poté $p = 2^{n-1}$, $A = 256^2$, $B = 4^2$. Protože je $81 - 3 = 78 = 13 \cdot 6$ a také $256^2 - 4^2 = (256 - 4)(256 + 4) = 252 \cdot 260 = 13 \cdot 20 \cdot 252$, jsou oba sčítanci na pravé straně rovnosti (1) čísla dělitelná 13. Je proto také rozdíl $a_{n+2} - a_n$ dělitelný 13. Číslo a_1 není dělitelné 13, neboť $a_1 = 84 = 13 \cdot 6 + 6$, kdežto číslo a_2 číslem 13 dělitelné je ($a_2 = 1\,092 = 13 \cdot 84$). Užitím principu matematické indukce již snadno zjistíme, že a_n je dělitelné 13, právě když n je sudé. Tím je důkaz hotov.

Jiné řešení. Sestavme tabulku zbytků při dělení čísla $a_n = 4 \cdot 3^{2^n} + 3 \cdot 4^{2^n}$ třinácti.

n	1	2	3	4	5	$\ldots$
3^{2^n}	9	3	9	3	9	$\ldots$
4^{2^n}	3	9	3	9	3	$\ldots$
$4 \cdot 3^{2^n}$	10	12	10	12	10	$\ldots$
$3 \cdot 4^{2^n}$	9	1	9	1	9	$\ldots$
a_n	6	0	6	0	6	$\ldots$

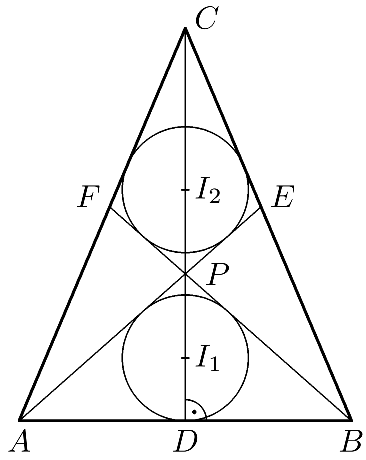
Zbytky obou čísel tvaru N^{2^n} určujeme rekurentně pomocí rovností $N^{2^{n+1}} = N^{2^n} \cdot N^{2^n} = \left(N^{2^n}\right)^2$. Protože $3^2 = 9$ a $9^2 = 81 \equiv 3 \pmod{13}$, vidíme, že v druhém i třetím řádku tabulky se pravidelně střídá trojka s devítkou, zbytky čísla a_n při dělení třinácti se tedy (vzhledem k číslu n) rovněž opakují s periodou 2. Číslo a_n je tedy dělitelné třinácti, právě když n je sudé.

2. *Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB. Na jeho výšce CD je zvolen bod P tak, že kružnice vepsané trojúhelníku ABP a čtyřúhelníku $PECF$ jsou shodné; přitom bod E je průsečík přímky AP se stranou BC a F průsečík přímky BP se stranou AC. Dokažte, že i kružnice vepsané trojúhelníkům ADP a BCP jsou shodné.* *(J. Šimša, K. Horák)*

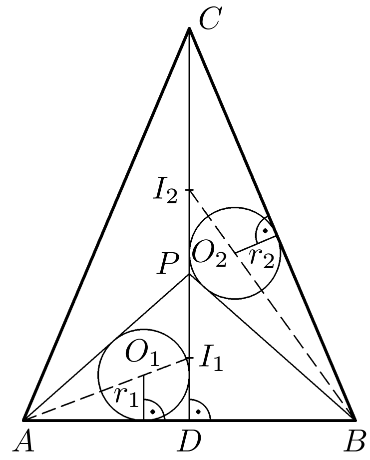
Řešení. Protože přímka CD je osou souměrnosti dvou vrcholových úhlů APB a EPF, leží střed I_1 kružnice vepsané trojúhelníku ABP na úsečce DP a zároveň střed I_2 kružnice vepsané čtyřúhelníku $PECF$ leží na úsečce CP (obr. 1). Navíc platí $|I_1P| = |I_2P|$, neboť obě zmíněné kružnice jsou shodné. Středy O_1, O_2 kružnic vepsaných trojúhelníkům ADP a BCP (obr. 2) pak leží po řadě na úsečkách AI_1, BI_2, neboť polopřímky AI_1 a BI_2 jsou osy odpovídajících úhlů DAP a CBP. Z rovnosti $|I_1P| = |I_2P|$ navíc plyne, že trojúhelníky API_1 a BPI_2 mají stejný obsah, protože se rovnají i příslušné výšky $|AD| = |BD|$.

Označme r_1, r_2 poloměry kružnic vepsaných trojúhelníkům ADP a BCP. Vyjádříme-li pomocí nich oba zmíněné obsahy ($S(XYZ)$ značí obsah trojúhelníku XYZ), dostaneme

$$S(API_1) = S(AO_1P) + S(O_1PI_1) = \frac{1}{2} \cdot |AP| \cdot r_1 + \frac{1}{2} \cdot |I_1P| \cdot r_1 = \frac{r_1}{2}(|AP| + |I_1P|),$$
$$S(BPI_2) = S(BO_2P) + S(O_2PI_2) = \frac{1}{2} \cdot |BP| \cdot r_2 + \frac{1}{2} \cdot |I_2P| \cdot r_2 = \frac{r_2}{2}(|BP| + |I_2P|).$$



Obr. 1

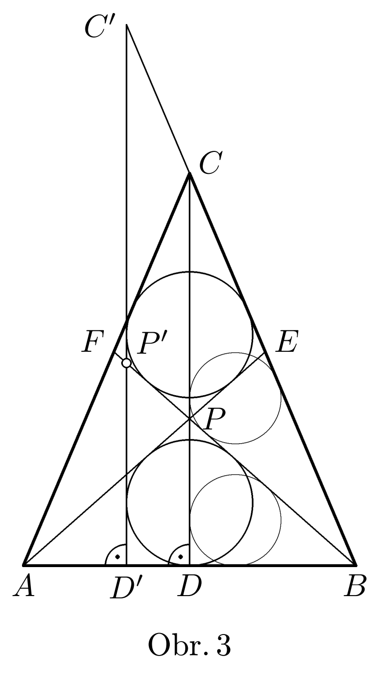


Obr. 2

Vzhledem k tomu, že $S(API_1) = S(BPI_2)$, $|I_1P| = |I_2P|$ a $|AP| = |BP|$, plyne odtud $r_1 = r_2$, což jsme měli dokázat.

Jiné řešení. Vzhledem k souměrnosti trojúhelníku ABC podle osy CD stačí dokázat, že se shodují kružnice vepsané trojúhelníkům BDP a BPC.

Vnější společné tečny shodných kružnic vepsaných úhelníkům ABP a $PECF$ jsou rovnoběžné se střednou CD, tedy kolmé na přímku AB. Uvažujme tu z nich, která protíná úsečky AD, PF a polopřímku opačnou CB. Tyto průsečíky označme po řadě D', P', C' (obr. 3). Ve stejnolehlosti, která zobrazí trojúhelník $BD'C'$ na trojúhelník BDC, odpovídají trojúhelníkům $BD'P'$ a $BP'C'$ trojúhelníky BDP a BPC. Protože kružnice vepsaná čtyřúhelníku $PECF$ je zároveň vepsána i trojúhelníku $BP'C'$ a kružnice vepsaná trojúhelníku ABP je zároveň vepsána trojúhelníku $BD'P'$ a obě uvedené kružnice jsou dle předpokladu shodné, jsou shodné i jejich obrazy ve zmíněné stejnolehlosti, tedy kružnice vepsané trojúhelníkům BDP a BPC.

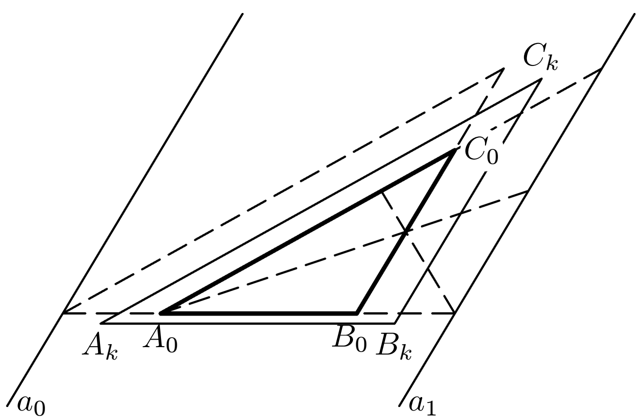


Obr. 3

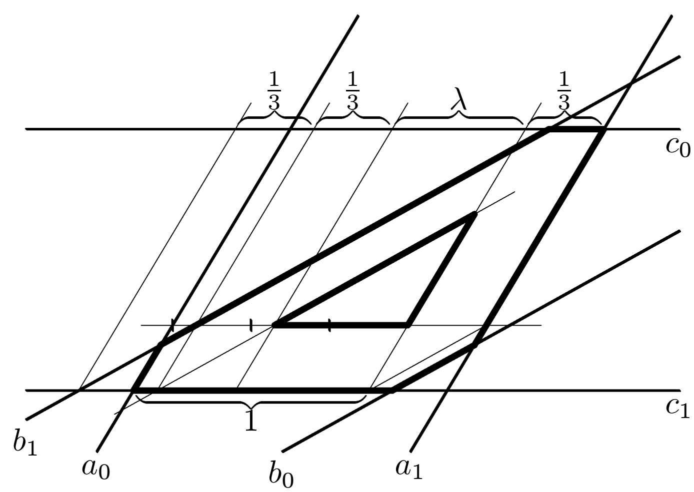
3. *V rovině je dáno 2 000 shodných trojúhelníků o obsahu 1, které jsou obrazy téhož trojúhelníku v různých posunutích. Každý z těchto trojúhelníků obsahuje těžiště všech zbývajících. Dokažte, že obsah sjednocení těchto trojúhelníků je menší než $\frac{22}{9}$.* *(P. Calábek)*

Řešení. Nechť trojúhelník ABC o obsahu 1 je vzorem všech 2 000 trojúhelníků $A_kB_kC_k$, $k \in \{1, 2, \ldots, 2\,000\}$, v různých posunutích. Obsahuje-li každý z těchto trojúhelníků těžiště všech zbývajících, plyne z řešení úlohy 49–A–I–4, že průnikem všech těchto trojúhelníků je trojúhelník $A_0B_0C_0$, který je podobný trojúhelníku ABC, přičemž jeho strany A_0B_0, B_0C_0, C_0A_0 jsou po řadě rovnoběžné se stranami AB, BC, CA a pro poměr podobnosti λ navíc platí $\lambda \in \langle \frac{1}{3}; 1\rangle$.

Je-li $A_kB_kC_k$ ($k \in \{1, 2, \ldots, 2\,000\}$) libovolný z daných trojúhelníků, je trojúhelník $A_0B_0C_0$ jeho částí, proto leží vrchol A_k v polorovině $B_0C_0A_0$ ve vzdálenosti nejvýše v_a od hraniční přímky B_0C_0, kde v_a je velikost výšky trojúhelníku ABC příslušné vrcholu A. Na druhou stranu je i vzdálenost strany B_kC_k od vrcholu A_0 nejvýše v_a. Protože navíc trojúhelník $A_0B_0C_0$ obsahuje těžiště všech takovýchto trojúhelníků $A_kB_kC_k$, nemůže být vzdálenost strany B_kC_k od strany $B_0C_0 \parallel B_kC_k$ větší než $\frac{1}{3}v_a$. Vzdálenost vrcholu A_0 od strany B_0C_0 je λv_a, dohromady je tedy vzdálenost obou rovnoběžných přímek B_kC_k, B_0C_0 nejvýše $\min(\frac{1}{3}, 1-\lambda)\cdot v_a$. Vidíme, že všechny dané trojúhelníky leží uvnitř pásu omezeného dvěma rovnoběžkami $a_0 \parallel a_1 \parallel B_0C_0$ (obr. 4), jejichž vzdálenost od B_0C_0 je v_a a $\min(\frac{1}{3}, 1-\lambda)\cdot v_a$. Analogické tvrzení můžeme vyslovit i pro další dva směry C_0A_0 a A_0B_0. Sjednocení všech daných trojúhelníků musí tedy ležet v průniku všech tří odpovídajících pásů.



Obr. 4



Obr. 5

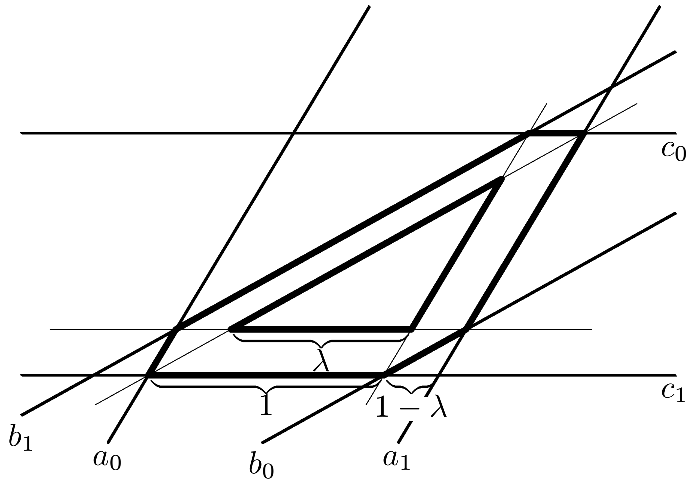
Rozlišíme nyní dva případy podle toho, čemu se rovná $\min(\frac{1}{3}, 1-\lambda)$.

1. Nechť $\frac{1}{3} \leqq \lambda < \frac{2}{3}$. Průnikem odpovídajících tří pásů je šestiúhelník, který vznikne z trojúhelníku T určeného trojicí přímek (a_1, b_1, c_1) odstraněním tří trojúhelníčků T_a, T_b, T_c určených trojicemi přímek (a_0, b_1, c_1), (a_1, b_0, c_1) a (a_1, b_1, c_0). V obr. 5 jsou vyznačeny některé poměrné vzdálenosti vzhledem k $|AB|$, s jejichž pomocí zjistíme, že trojúhelník T je podobný trojúhelníku ABC s poměrem podobnosti $1+\lambda$ a trojúhelníky T_a, T_b, T_c jsou podobné trojúhelníku ABC s poměrem podobnosti $\lambda - \frac{1}{3}$. Z vypočtených poměrů je zároveň zřejmé, že pro $\lambda = \frac{1}{3}$ se trojúhelníky T_a, T_b, T_c stáhnou do jediného bodu, takže uvedený šestiúhelník se zredukuje na trojúhelník T.

Pro obsah $S(\lambda)$ vyznačeného útvaru tak pro $\lambda < \frac{2}{3}$ platí

$$S(\lambda) = (1+\lambda)^2 - 3\Big(\lambda - \frac{1}{3}\Big)^2 =$$
$$= -2\lambda^2 + 4\lambda + \frac{2}{3} = -2(\lambda-1)^2 + \frac{8}{3} < \frac{8}{3} - 2\cdot\frac{1}{9} = \frac{22}{9}.$$

2. Nechť $\frac{2}{3} \leqq \lambda \leqq 1$. Průnikem odpovídajících tří pásů je opět šestiúhelník (obr. 6), přičemž



Obr. 6

odpovídající trojúhelník T je podobný trojúhelníku ABC s poměrem podobnosti $3-2\lambda$ a trojúhelníky T_a, T_b, T_c jsou podobné trojúhelníku ABC s poměrem podobnosti $1-\lambda$ (v tomto případě se šestiúhelník zredukuje na trojúhelník T pro $\lambda = 1$).

Pro obsah $S(\lambda)$ v tomto případě platí

$$\begin{aligned} S(\lambda) &= (3-2\lambda)^2 - 3(1-\lambda)^2 = \\ &= \lambda^2 - 6\lambda + 6 = (\lambda-3)^2 - 3 \leqq \frac{49}{9} - 3 = \frac{22}{9} \end{aligned}$$

s rovností pro $\lambda = \frac{2}{3}$.

Zjistili jsme, že sjednocení všech trojúhelníků $A_kB_kC_k$ ($k = 1, 2, \ldots, 2\,000$) je pro $\lambda \neq \frac{2}{3}$ částí rovinného útvaru, jehož obsah je menší než $\frac{22}{9}$. Pro $\lambda = \frac{2}{3}$ je pak částí šestiúhelníku s obsahem $\frac{22}{9}$. Strana tohoto šestiúhelníku, která leží např. na přímce a_0, může obsahovat jen konečně mnoho vrcholů A_i daných trojúhelníků $A_iB_iC_i$, takže v šestiúhelníku určitě najdeme trojúhelníček kladného obsahu, který do uvažovaného sjednocení nepatří. Obsah sjednocení uvažovaných trojúhelníků je proto i v tomto případě menší než $\frac{22}{9}$. Tím je důkaz hotov.

---

4. *Pro které kvadratické funkce $f(x)$ existuje taková kvadratická funkce $g(x)$, že kořeny rovnice $g\big(f(x)\big) = 0$ jsou čtyři různé po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti a současně i kořeny rovnice $f(x)g(x) = 0$?* *(P. Černek)*

Řešení. Ze zadání plyne, že každá z rovnic $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ má dva reálné kořeny, přitom všechny čtyři kořeny obou uvažovaných rovnic jsou navzájem různé. Označme x_1, x_2 kořeny rovnice $f(x) = 0$. Platí tedy $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$, kde a je reálné číslo, $a \neq 0$. Číslo x_1 je podle zadání rovněž kořenem rovnice $g\big(f(x)\big) = 0$, platí tudíž $g\big(f(x_1)\big) = g(0) = 0$. Odtud vyplývá, že rovnice $g(x) = 0$ má jeden kořen 0. Označme b ($b \neq 0$) druhý kořen této rovnice. Je tedy $g(x) = cx(x-b)$, kde c je reálné číslo, $c \neq 0$. Čísla 0 a b jsou podle zadání rovněž kořeny rovnice $g\big(f(x)\big) = 0$:

$$g\big(f(0)\big) = cf(0)\big(f(0)-b\big) = 0 \qquad \text{a} \qquad g\big(f(b)\big) = cf(b)\big(f(b)-b\big) = 0.$$

Jelikož čísla 0 a b nemohou být kořeny rovnice $f(x) = 0$, plyne odtud $f(0) = f(b) = b$.

Na číselné ose jsou proto jak body 0 a b, tak i body x_1 a x_2 souměrně sdružené podle x-ové souřadnice vrcholu paraboly $y = f(x)$. Čísla 0, b, x_1 a x_2 (tvořící dle zadání aritmetickou posloupnost) mohou tedy být uspořádána dvěma způsoby:

• Čísla x_1 a x_2 leží uvnitř intervalu s krajními body 0 a b. Pak $x_1 = \frac{1}{3}b$ a $x_2 = \frac{2}{3}b$ (při vhodné volbě indexů), tudíž
$$b = f(0) = a\Big(-\frac{b}{3}\Big)\Big(-\frac{2b}{3}\Big) = \frac{2ab^2}{9},$$
takže $b = \dfrac{9}{2a}$ a
$$f(x) = a\Big(x - \frac{3}{2a}\Big)\Big(x - \frac{3}{a}\Big) = ax^2 - \frac{9}{2}x + \frac{9}{2a}.$$

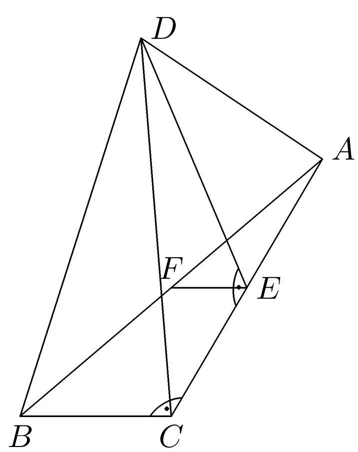
• Čísla 0 a b leží uvnitř intervalu s krajními body x_1 a x_2. Pak $x_1 = -b$ a $x_2 = 2b$ (při vhodné volbě indexů), tudíž
$$b = f(0) = ab(-2b) = -2ab^2,$$
takže $b = -\dfrac{1}{2a}$ a
$$f(x) = a\Big(x - \frac{1}{2a}\Big)\Big(x + \frac{1}{a}\Big) = ax^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2a}.$$

Závěr: Úloze vyhovují všechny kvadratické funkce f tvaru
$$f(x) = ax^2 - \frac{9}{2}x + \frac{9}{2a} \qquad \text{nebo} \qquad f(x) = ax^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2a},$$
kde a je libovolné nenulové reálné číslo.

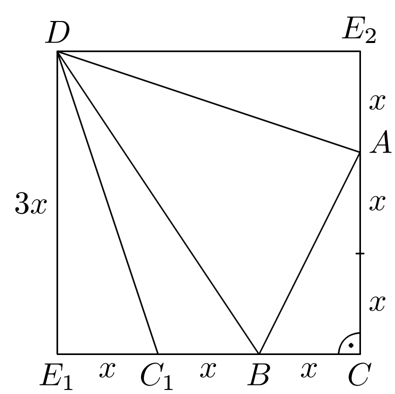
---

5. *Monika zhotovila papírový model trojbokého jehlanu, jehož podstavou byl pravoúhlý trojúhelník. Když model rozřízla podél odvěsen podstavy a podél těžnice jedné ze stěn, vznikl po rozvinutí do roviny čtverec o straně a. Určete objem tohoto jehlanu.* *(P. Leischner)*

Řešení. Označme $ABCD$ uvažovaný jehlan s podstavou ABC, kde $|\sphericalangle ACB| = 90°$. Podle textu úlohy byl model rozříznut podél obou odvěsen AC a BC podstavy a dále podél těžnice z vrcholu D jedné ze stěn BCD, ACD. Při řezu podél těžnice ve stěně ABD by totiž nebylo možné rozvinout model do roviny. Bez újmy na obecnosti předpokládejme dále, že řez je veden podél těžnice DE ve stěně ACD (obr. 7), kdy po rozvinutí do roviny vznikne útvar s hranicí $BCAE_2DE_1C_1B$ a pravým úhlem u vrcholu C (obr. 8). Protože tento útvar je čtverec (označme ho $\mathcal{C}$), jsou úhly AE_2D a DE_1C_1 pravé (žádný z nich nemůže být přímý, neboť jejich součet je 180°). Proto je těžnice DE trojúhelníku ACD zároveň jeho výškou a body E_1, E_2 jsou vrcholy čtverce $\mathcal{C}$.



Obr. 7



Obr. 8

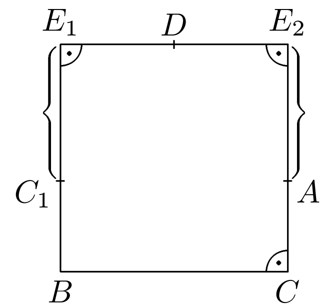
Kdyby vrcholy E_1 a E_2 čtverce $\mathcal{C}$ byly sousední, z rovnosti $|E_1C_1| = |E_2A|$ a z toho, že $\mathcal{C}$ má vrchol C, by plynulo, že $\mathcal{C} = CE_2E_1B$, a tak $|BC| = |BE_1|$, což ale odporuje rovnosti $|BC| = |BC_1|$ (obr. 9). Tak jsme (sporem) dokázali, že vrcholy E_1 a E_2 čtverce $\mathcal{C}$ *nejsou* sousední, proto k vrcholům $\mathcal{C}$ patří (kromě bodů E_1, E_2 a C) nutně bod D (z úseku E_2DE_1 hranice $BCAE_2DE_1C_1B$).

Popsané body rozdělují hranici čtverce $\mathcal{C} = CE_2DE_1$ na úseky, jejichž délky jsou vyznačeny na obr. 8 pomocí výhodného označení $x = \frac{1}{3}a$. Délky ostatních hran jehlanu spočteme podle Pythagorovy věty:

$$|DC| = |DA| = \sqrt{(3x)^2 + (x)^2} = x\sqrt{10},$$
$$|DB| = \sqrt{(3x)^2 + (2x)^2} = x\sqrt{13}, \quad |AB| = x\sqrt{5}.$$

Abychom zjistili objem jehlanu $ABCD$, potřebujeme určit velikost jeho tělesové výšky.

Označíme-li F střed hrany AB, vidíme, že hrana AC je kolmá na rovinu EFD, neboť $AC \perp BC \parallel EF$ a $AC \perp DE$. Rovina EFD je tedy kolmá na základnu ABC.



Obr. 9

Tělesová výška jehlanu je proto výškou (z vrcholu D) trojúhelníku DEF. Protože DF tvoří těžnici trojúhelníku ABD, ze známého vzorce pro velikost těžnice dostaneme

$$2|DF|^2 = |DA|^2 + |DB|^2 - \frac{1}{2}|AB|^2 = \frac{41}{2}x^2,$$

takže strany trojúhelníku DEF mají délky $|DF| = \frac{1}{2}x\sqrt{41}$, $|DE| = 3x$ a $|EF| = \frac{1}{2}|BC| = \frac{1}{2}x$. Podle Heronova vzorce je obsah S takového trojúhelníku roven

$$S = \frac{x^2}{4}\sqrt{\left(3 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{41}}{2}\right)\left(3 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{41}}{2}\right)\left(3 + \tfrac{\sqrt{41}}{2} - \tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{\sqrt{41}}{2} + \tfrac{1}{2} - 3\right)} =$$
$$= \frac{x^2}{16}\sqrt{\left(7 + \sqrt{41}\right)\left(7 - \sqrt{41}\right)\left(5 + \sqrt{41}\right)\left(\sqrt{41} - 5\right)} = \frac{x^2\sqrt{2}}{2},$$

a tak má jeho výška v z vrcholu D velikost $v = \dfrac{2S}{|EF|} = 2x\sqrt{2}$. Objem V jehlanu $ABCD$ je proto roven

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}|AC| \cdot |BC| \cdot v = \frac{2\sqrt{2}}{3}\,x^3 = \frac{2\sqrt{2}}{81}\,a^3.$$

Závěr: Objem uvažovaného jehlanu je $\dfrac{2\sqrt{2}}{81}\,a^3$.

Poznámka.

Ze čtverce lze popsaným způsobem čtyřstěn $ABCD$ požadovaných vlastností vytvořit, když je součet dvou ze tří předpokládaných stěnových úhlů při vrcholu D větší než úhel třetí. Protože jejich součet je $90°$, stačí ověřit, že každý z těchto tří úhlů je menší než $45°$. Nerovnost $|\sphericalangle CDB| < 45°$ je zřejmá, zbylé dvě nerovnosti jsou důsledkem výpočtů, podle kterých $\cos|\sphericalangle ADB| = \frac{9}{\sqrt{130}} > \frac{\sqrt{2}}{2}$ a $\operatorname{tg}|\sphericalangle CDA| = \operatorname{tg}(2|\sphericalangle C_1DE_1|) = \frac{3}{4} < 1$.

6. *Najděte všechna čtyřmístná čísla $\overline{abcd}$ (v desítkové soustavě), pro něž platí rovnost*

$$\overline{abcd} + 1 = (\overline{ac} + 1)(\overline{bd} + 1).$$

(J. Zhouf)

Řešení. Rovnost $1\,000a + 100b + 10c + d + 1 = (10a + c + 1)(10b + d + 1)$ lze upravit na tvar

$$100a(9 - b) + 10a(9 - d) + 10b(9 - c) + c(9 - d) = 0.$$

Přitom každý ze čtyř sčítanců na levé straně je nezáporné celé číslo, proto bude tato rovnost splněna, právě když bude každý z nich roven nule. Protože je $a > 0$, musí být $b = d = 9$ a následně i $c = 9$. V tom případě rovnici vyhovuje libovolná číslice a, $a \in \{1, 2, \ldots, 9\}$. Řešením úlohy jsou tedy právě všechna následující čtyřmístná čísla: 1 999, 2 999, 3 999, 4 999, 5 999, 6 999, 7 999, 8 999 a 9 999.

49. ročník matematické olympiády, III. kolo kategorie A

Bílovec, 10. dubna 2000

1. Nechť n je přirozené číslo. Dokažte, že součet $4 \cdot 3^{2^n} + 3 \cdot 4^{2^n}$ je dělitelný třinácti, právě když n je sudé.

2. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB. Na jeho výšce CD je zvolen bod P tak, že kružnice vepsané trojúhelníku ABP a čtyřúhelníku $PECF$ jsou shodné; přitom bod E je průsečík přímky AP se stranou BC a F průsečík přímky BP se stranou AC. Dokažte, že i kružnice vepsané trojúhelníkům ADP a BCP jsou shodné.

3. V rovině je dáno 2 000 shodných trojúhelníků o obsahu 1, které jsou obrazy téhož trojúhelníku v různých posunutích. Každý z těchto trojúhelníků obsahuje těžiště všech zbývajících. Dokažte, že obsah sjednocení těchto trojúhelníků je menší než $\frac{22}{9}$.

49. ročník matematické olympiády, III. kolo kategorie A

Bílovec, 11. dubna 2000

4. Pro které kvadratické funkce $f(x)$ existuje taková kvadratická funkce $g(x)$, že kořeny rovnice $g\big(f(x)\big) = 0$ jsou čtyři různé po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti a současně i kořeny rovnice $f(x)g(x) = 0$?

5. Monika zhotovila papírový model trojbokého jehlanu, jehož podstavou byl pravoúhlý trojúhelník. Když model rozřízla podél odvěsen podstavy a podél těžnice jedné ze stěn, vznikl po rozvinutí do roviny čtverec o straně a. Určete objem tohoto jehlanu.

6. Najděte všechna čtyřmístná čísla $\overline{abcd}$ (v desítkové soustavě), pro něž platí rovnost

$$\overline{abcd} + 1 = (\overline{ac} + 1)(\overline{bd} + 1).$$