41. mezinárodní matematická olympiáda

V pořadí již 41. ročník této prestižní mezinárodní soutěže se konal 13.–25. července 2000 v Korejské republice. Soutěž proběhla v Taejonu, na půdě jedné z nejprestižnějších univerzit v Asii, kterou je poměrně mladá vysoká škola KAIST (Korea Advanced Institut of Science and Technology), založená v r. 1971. Letošního ročníku MMO se zúčastnili 462 soutěžící z 82 zemí celého světa. Logo olympiády svými dvěma čtverci symbolizuje blížící se konec dvou tisíciletí, taeguk (rozdělený kruh) je tradičním symbolem Koreje (najdemo ho i na korejské státní vlajce). Použité barvy (modrá, zelená a červená, jejichž kombinací dostaneme všechny barvy spektra) pak symbolizují krásu a sílu matematiky, základu veškeré vědy a technologie.

Patronát nad organizací a průběhem 41. ročníku MMO převzal ministerský předseda Korejské republiky *Han Dong Lee*, který se osobně zúčastnil slavnostního zahájení soutěže. Korejští organizátoři připravili všem účastníkům dobré podmínky pro samotnou soutěž a také zajímavý doprovodný kulturní a společenský program. Soutěžící měli možnost navštívit korejský skanzen v Yonginu poblíž Suwonu, stará archeologická naleziště v Kyóngju a také pavilony světové výstavy EXPO, která se v Taejonu konala v roce 1993. Ve školském kampusu KAISTu byla po celou dobu soutěžícím k dispozici všechna sportoviště, plavecký bazén a moderně vybavená počítačová učebna.

Výběr soutěžících za Českou republiku byl proveden v Jevíčku na závěrečném soutěžním soustředění osmi nejúspěšnějších účastníků celostátního kola. Vybraní soutěžící se pak ještě zúčastnili utkání ve slovenské Modre mezi Českou republikou a Slovenskem, kde soutěžili reprezentanti obou zemí za podmínek podobných jako při soutěži na MMO. Naše družstvo tvořila následující šestice olympioniků: *Jaroslav Hájek*, z Gymnázia M. Koperníka v Bílovci, *Jan Herman* a *Rudolf Stolař* z Gymnázia na tř. Kpt. Jaroše v Brně, *Jan Houštěk* z Gymnázia v Pelhřimově, *Jan Kynčl* z Gymnázia v Jilemnici, a *Ondřej Suchý* z Gymnázia na Mikulášské nám. v Plzni. Vedoucím naší výpravy byl dr. *Karel Horák* z Matematického ústavu Akademie věd v Praze, pedagogickým vedoucím družstva byl dr. *Jaroslav Švrček* z Univerzity Palackého v Olomouci. Vedoucí delegace přicestoval do hlavního města Koreje Soulu kvůli výběru úloh již 13. července, ostatní čeští účastníci pak o tři dny později.

Dva dny po příletu soutěžících, tedy 18. července se konalo slavnostní zahájení. Vlastní soutěž proběhla ve dnech 19. a 20. července v pavilonu univerzitní knihovny KAISTu. Jako obvykle žáci řešili každý soutěžní den po třech úlohách. Na každou trojici úloh měli vyhrazeny vždy 4,5 hodiny čistého času a za každou úlohu mohli získat maximálně 7 bodů.

Naše mladé družstvo nezklamalo. Svědčí o tom především zisk jedné stříbrné medaile *Jane Houšťkem* a dále tří bronzových medailí oproti jediné bronzové medaili z předešlé 40. MMO v Rumunsku. Jejich výsledky jsou uvedeny v následující tabulce:

		Body za úlohu						**Body**	**Cena**
Umístění		1	2	3	4	5	6		
395.–416.	Jaroslav Hájek, 2. roč. GMK Bílovec,	0	0	0	2	0	0	2	
205.–213.	Jan Herman, 3. roč. gymnázia, Brno, tř. kpt. Jaroše	7	2	0	2	0	0	11	III
90.–99.	Jan Houštěk, 7. roč. gymnázia, Pelhřimov	7	2	1	7	4	0	21	II
139.–149.	Jan Kynčl, 5. roč. gymnázia, Jilemnice	7	1	4	2	0	2	16	III
351.–368.	Rudolf Stolař, 3. roč. gymnázia, Brno, tř. Kpt. Jaroše	0	1	0	3	0	0	4	
205.–213.	Ondřej Suchý, 6. roč. gymnázia, Plzeň, Mikulášské nám.	7	0	0	2	0	2	11	III
	Celkem	28	6	5	18	4	4	65	

O náročnosti soutěžních úloh svědčí i nízké hranice pro zisk medailí: na třetí cenu stačilo 11 bodů, druhá cena se udělovala za 21–30 bodů a první za alespoň 31 bodů. Řešitelů, kteří si z Taejonu odvezli zlatou medaili, bylo celkem 28. Mezi nimi byli ale čtyři, kteří získali plný počet 42 bodů: *Alexandr Usnič* z Běloruska, *Zhiwei Yun* z Číny a dva soutěžící *Alexej Pojarkov* a *Alexandr Gajfullin* z Ruska.

Neoficiální pořadí všech zúčastněných zemí s počtem získaných cen a celkovým bodovým ziskem (jak vidíte, ještě lépe se vedlo našim slovenským kolegům):

	I	II	III	body
ČLR	6	0	0	218
Rusko	5	1	0	215
USA	2	4	0	184
Korea	3	3	0	172
Bulharsko	2	3	1	169
Vietnam	3	2	1	169
Bělorusko	2	2	2	165
Tchaj-wan	2	3	1	164
Maďarsko	1	5	0	156
Írán	1	4	1	155
Izrael	2	1	3	139
Rumunsko	0	4	2	139
Ukrajina	2	2	0	135
Indie	0	5	1	132
Japonsko	1	2	3	125
Austrálie	1	3	1	122
Kanada	1	2	1	112
Slovensko	0	2	3	111
Turecko	0	3	1	111
Arménie	0	2	3	108
Německo	1	1	2	108
Velká Británie	0	2	4	96
Jugoslávie	0	1	3	93
Kazachstán	0	1	4	91
Argentina	0	1	4	88
Moldavsko (5)	0	2	3	84
JAR	0	0	4	81
Hongkong	0	1	2	80
Bosna a Hercegovina	0	0	4	78
Thajsko	0	1	3	78
Švédsko	0	2	0	77
Mexiko	0	1	3	75
Polsko	0	1	2	75
Chorvatsko	0	0	4	73
Slovinsko	0	1	1	73
Gruzie	0	1	0	72
Singapur	0	1	2	71
Uzbekistán	0	0	2	70
Rakousko	0	2	1	68
Mongolsko	0	0	4	67
Švýcarsko (4)	0	1	2	67

	I	II	III	body
Česká republika	0	1	3	65
Makedonie	0	1	2	63
Kolumbie	0	0	2	61
Kuba	0	0	2	61
Lotyšsko	0	0	3	60
Nizozemsko	0	0	2	60
Brazílie	0	0	3	58
Francie	0	0	3	58
Itálie	0	0	3	57
Indonézie	0	0	2	54
Finsko	0	0	3	52
Belgie	0	0	2	51
Lucembursko (4)	0	0	2	51
Maroko	0	0	1	48
Řecko	0	0	1	46
Norsko	0	0	1	45
Estonsko	0	0	1	42
Trinidad a Tobago	0	0	0	40
Island	0	0	0	37
Dánsko	0	0	1	36
Litva	0	0	1	34
Nový Zéland	0	0	0	34
Ázerbájdžán	0	0	0	32
Kypr	0	0	0	32
Malajsie (3)	0	0	2	32
Peru (4)	0	0	0	32
Španělsko	0	0	0	29
Irsko	0	0	0	28
Filipíny (4)	0	0	0	23
Uruguay (3)	0	0	0	23
Portugalsko	0	0	0	21
Srí Lanka (3)	0	0	0	21
Ekvádor	0	0	0	19
Albánie (5)	0	0	0	17
Kirgizie (4)	0	0	1	16
Macao	0	0	0	16
Kuvajt (4)	0	0	0	12
Guatemala	0	0	0	11
Venezuela (2)	0	0	0	11
Brunei (2)	0	0	0	8
Portoriko	0	0	0	8

Jak je patrno z tabulky zúčastněných států, na první místo v neoficiálním pořadí jednotlivých zemí podle celkového bodového zisku se tentokrát vyšvihlo Bulharsko, další místa obsadily tradičně výborná družstva Číny, Spojených států, Vietnamu a Ruska. (Případná čísla v závorce upozorňují na nižší počet reprezentantů.)

Slavnostní zakončení 41. MMO se konalo v mezinárodním kulturním centru státní univerzity Chungnam v Taejonu. Při této příležitosti pozvali zástupci USA všechny zúčastněné delegace k účasti na dalším ročníku MMO.

Texty soutěžních úloh

(v závorce je uvedena země, která úlohu navrhla)

1. Jsou dány dvě kružnice Γ_1 a Γ_2 se protínají v bodech M a N. Označme l jejich společnou tečnu takovou, že bod M je blíž l než bod N. Bod dotyku přímky l s Γ_1 označme A a bod dotyku s Γ_2 označme B. Přímka vedená bodem M rovnoběžně s l protíná kružnici Γ_1 v dalším bodě C a kružnici Γ_2 v dalším bodě D. Označme dále E průsečík přímek CA a DB, P průsečík přímek AN a CD a Q průsečík přímek BN a CD. Dokažte, že $|EP| = |EQ|$. (*Maďarsko*)

2. Nechť a, b, c jsou kladná reálná čísla taková, že $abc = 1$. Dokažte, že

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leqq 1.$$

(*Rusko*)

3. Nechť $n \geqq 2$ je přirozené číslo. Na počátku je na vodorovné přímce n blech, ne všechny v témž bodě. Pro kladné reálné číslo λ definujme *tah* následujícím způsobem:

vybereme libovolné dvě blechy v bodech A a B, přičemž bod A je nalevo od bodu B;

blechu z bodu A necháme skočit do bodu C dané přímky napravo od B, přičemž $\dfrac{|BC|}{|AB|} = \lambda$.

Určete všechny hodnoty λ takové, že pro libovolný bod M na dané přímce a pro libovolnou počáteční polohu n blech existuje konečná posloupnost tahů, která přesune všechny blechy na místa napravo od bodu M.

(*USA*)

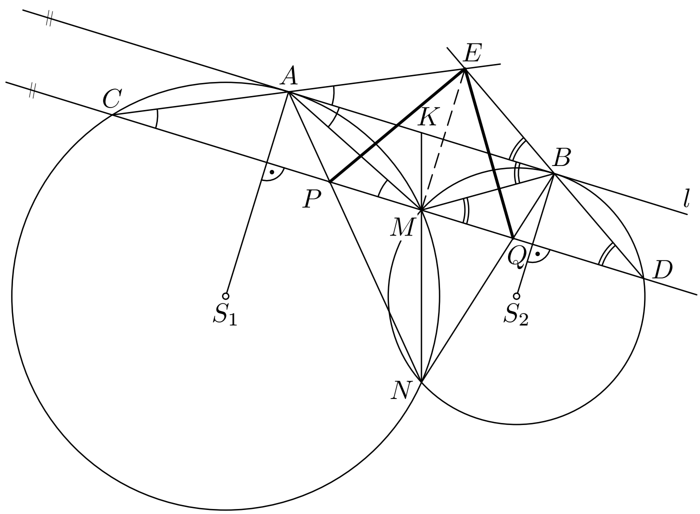
4. Kouzelník má sto karet očíslovaných od 1 do 100. Vloží je do tří krabic — červené, bílé a modré — tak, aby v každé byla aspoň jedna karta. Jeden z diváků si vybere dvě z tří krabic, z každé vytáhne jednu kartu a oznámí součet čísel na vybraných kartách. Na základě tohoto součtu určí kouzelník krabici, z které divák kartu nevytáhl. Kolika způsoby lze rozdělit všechny karty do krabic, aby kouzelníkův trik vždy fungoval? (Rozdělení považujeme za různá, pokud se aspoň jedna karta objeví v jiné krabici.) (*Rusko*)

5. Rozhodněte, zda existuje kladné celé číslo n takové, že n je dělitelné přesně 2 000 různými prvočísly a $2^n + 1$ je dělitelné n. (*Bělorusko*)

6. Nechť AH_1, BH_2, CH_3 jsou výšky ostroúhlého trojúhelníku ABC. Kružnice vepsaná trojúhelníku ABC se po řadě dotýká stran BC, CA, AB v bodech T_1, T_2, T_3. Označme po řadě l_1, l_2, l_3 přímky souměrně sdružené s přímkami H_2H_3, H_3H_1, H_1H_2 podle os T_2T_3, T_3T_1, T_1T_2. Dokažte, že přímky l_1, l_2, l_3 určují trojúhelník, jehož vrcholy leží na kružnici vepsané trojúhelníku ABC. (*Rusko*)

Řešení úloh

1. Označme K průsečík přímky MN s tečnou l obou kružnic (obr. 1). Protože bod K leží na chordále obou kružnic, má vůči nim stejnou moc-



Obr. 1

nost, tj.

$$|AK|^2 = |KM| \cdot |KN| = |KB|^2.$$

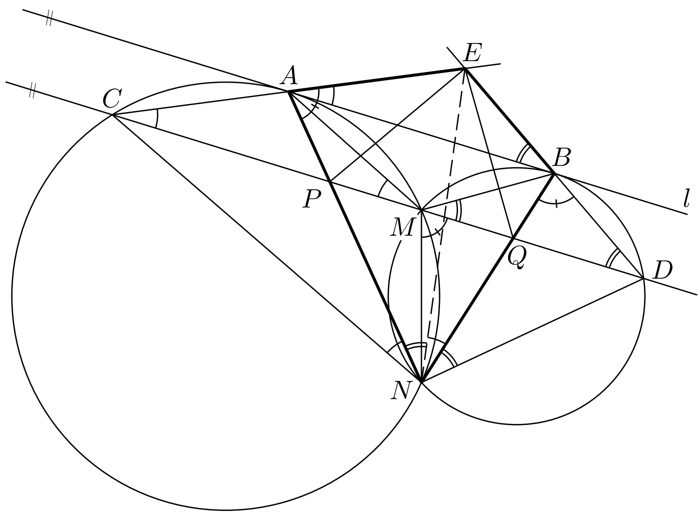
Je tedy $|AK| = |KB|$, a protože $PQ \parallel AB$, je díky stejnolehlosti trojúhelníků NPQ a NAB také $|PM| = |MQ|$. Stačí tedy ukázat, že je $EM \perp PQ$.

Protože CD je rovnoběžná s tečnou AB, půlí oba body dotyku A, B příslušné oblouky CAM a MBD, takže oba trojúhelníky CMA a MDB jsou rovnoramenné. Je tedy

$$\begin{aligned} |\sphericalangle BAM| &= |\sphericalangle AMC| = |\sphericalangle ACM| = |\sphericalangle EAB|, \\ |\sphericalangle ABM| &= |\sphericalangle BMD| = |\sphericalangle BDM| = |\sphericalangle EBA|, \end{aligned} \tag{1}$$

což znamená, že body E a M jsou souměrně sdruženy podle osy AB. Je proto $EM \perp AB$, a tedy i $EM \perp PQ$, což jsme chtěli dokázat.

Jiné řešení. Využijeme zřejmé rovnosti (1) z předchozího řešení. Přímka CD odděluje body E a N, takže z vlastností obvodových úhlů



Obr. 2

v tětivových čtyřúhelnících $NDBM$ a $NMAC$ plynou rovnosti (obr. 2)

$$|\sphericalangle NBD| = |\sphericalangle NMD| = 180^\circ - |\sphericalangle NMC| = 180^\circ - |\sphericalangle NAC| = |\sphericalangle NAE|.$$

To znamená, že také čtyřúhelník $ANBE$ je tětivový. Je tedy

$$|\sphericalangle ANE| = |\sphericalangle ABE| = |\sphericalangle PDE| \quad \text{a} \quad |\sphericalangle BNE| = |\sphericalangle BAE| = |\sphericalangle QCE|.$$

To znamená, že i čtyřúhelníky $PNDE$ a $CNQE$ jsou tětivové. Navíc zřejmě platí

$$|\sphericalangle ANC| = |\sphericalangle AMC| \quad \text{a} \quad |\sphericalangle BND| = |\sphericalangle BMD|,$$

takže

$$|\sphericalangle EQC| = |\sphericalangle ENC| = |\sphericalangle END| = |\sphericalangle EPD|.$$

Rovnost $|\sphericalangle EQC| = |\sphericalangle EPD|$ ovšem znamená, že trojúhelník PQE je rovnoramenný, přičemž $|EP| = |EQ|$.

2. Danou nerovnost můžeme homogenizovat vhodnou změnou proměnných: Vezměme kladná čísla x, y a z tak, aby

$$a = \frac{x}{y}, \quad b = \frac{y}{z}, \quad c = \frac{z}{x}$$

(jedna možná volba je např. $x = 1$, $y = 1/a$ a $z = 1/(ab)$). Místo původní nerovnosti tak dostaneme

$$(x - y + z)(y - z + x)(z - x + y) \leqq xyz.$$

Protože každá dvě z čísel $u = x - y + z$, $v = y - z + x$, $w = z - x + y$ mají kladný součet, je nejvýše jedno z nich záporné. V takovém případě je ovšem $uvw \leqq 0 < xyz$ a nerovnost triviálně platí.

Předpokládejme tedy, že $u \geqq 0$, $v \geqq 0$, $w \geqq 0$. Potom podle nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem platí

$$\sqrt{uv} = \sqrt{(x - y + z)(y - z + x)} \leqq \frac{1}{2}\big((x - y + z) + (y - z + x)\big) = x.$$

Podobně platí i $\sqrt{vw} \leqq y$ a $\sqrt{wu} \leqq z$, takže $uvw \leqq xyz$, jak jsme chtěli dokázat.

Jiné řešení (podle *Robina Chapmana*). Protože

$$b - 1 + \frac{1}{c} = b\Big(1 - \frac{1}{b} + a\Big),$$

je

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right) = b\left(a^2 - \left(1 - \frac{1}{b}\right)^2\right) \leqq ba^2. \qquad (1)$$

Analogicky platí

$$\Big(b-1+\frac{1}{c}\Big)\Big(c-1+\frac{1}{a}\Big) \leqq cb^2 \ \text{ a } \ \Big(c-1+\frac{1}{a}\Big)\Big(a-1+\frac{1}{c}\Big) \leqq ac^2. \quad (2)$$

Kdyby nyní některý z činitelů v dané nerovnosti byl záporný, např. $a-1+1/b<0$, pak $a<1$ a zároveň $1/b<1$, takže $c-1+1/a>0$ a $b-1+1/c>0$. V takovém případě je ovšem daná nerovnost triviálně splněna. Jsou-li všechny tři činitele nezáporné, můžeme nerovnosti (1) a (2) vynásobit a dostaneme, že kvadrát levé strany je nejvýše roven $ba^2cb^2ac^2=1$. Tím je nerovnost dokázána.

Jiné řešení (řešení *Jaroslava Hájka*, na které přišel po soutěži). Daná nerovnost je invariantní vůči cyklické permutaci čísel a, b, c, proto můžeme předpokládat, že je např. $a \leqq 1$ a $c \geqq 1$ (dokonce bez újmy na obecnosti, protože daná nerovnost se nezmění po záměně $b \leftrightarrow 1/b$, $c \leftrightarrow 1/a$), takže platí

$$(a-1)(c-1) \leqq 0.$$

To lze zapsat jako $ac-a+1 \leqq c$, zároveň však je $ac-a+1=a(c-1)+ +1 \geqq 1 > 0$, tedy

$$0 < ac-a+1 \leqq c.$$

Protože $1-(bc-c)^2 \leqq 1$, plyne z předchozí nerovnosti nerovnost

$$\big(1-(bc-c)^2\big)(ac-a+1) \leqq c,$$

neboli

$$(1-bc+c)(1+bc-c)(ac-a+1) \leqq c,$$
$$(1-bc+c)\Big(\frac{1}{c}+b-1\Big)(ac-a+1) \leqq 1.$$

Vydělíme-li teď levou stranu poslední nerovnosti číslem $abc=1$ tak, že první závorku vydělíme bc a třetí číslem a, dostaneme dokazovanou nerovnost.